matemática moderna

Papy

EDITORIAL UNIVERSITARIA DE BUENOS AIRES

MATEMÁTICA MODERNA

GEORGES PAPY

"La matemática que, a principio de siglo, apenas tenía aplicación fuera de la física y del arte del ingeniero, se ha convertido en elemento fundamental del humanismo contemporáneo y en herramienta indispensable en la mayoría de los dominios del pensamiento, de la ciencia y de la técnica", sostiene el autor del presente libro, y de este hecho innegable deduce la necesidad de enseñar los principios matemáticos básicos a todos los estudiantes secundarios.

Matemática moderna es una obra destinada a profesores y alumnos de la escuela media, pero útil a todos quienes busquen una versión actual de la ciencia. En su lengua original ha llegado ya a los seis volúmenes, inmediatamente traducidos a otros idiomas. Este primer tomo que presenta EUDEBA se ocupa de los siguientes temas: teoría de los conjuntos, las relaciones y funciones, su aplicación a la geometría, sistema de numeración binaria, fundamentación de los números naturales y enteros, operaciones, ejemplos de importantes estructuras como la de grupo y anillo. Cada uno de ellos está acompañado de una se-

Matemática moderna

LA ESCUELA EN EL TIEMPO
Textos del secundario/Matemática

PAPY
con la colaboración de
Frédérique Papy

MATEMATICA MODERNA

Tomo I

EDITORIAL UNIVERSITARIA DE BUENOS AIRES

Título de la obra original:
Mathématique moderne
Marcel Didier, Editeur, Bruxelles, Paris, 1964

Traducida por
Delia Pigretti

La revisión técnica estuvo a cargo de la traductora y de
Jorge Bosch,
profesor de la Universidad de Buenos Aires

(c) 1968
Editorial Universitaria de Buenos Aires - Rivadavia 1571/73

Sociedad de Economía Mixta
Fundada por la Universidad de Buenos Aires

Hecho el depósito de ley
IMPRESO EN LA ARGENTINA - PRINTED IN ARGENTINA

A mi padre

PREFACIO

La matemática, que a comienzos del siglo no tenía aplicaciones fuera de la física y del arte de la ingeniería, se ha convertido en un elemento fundamental del humanismo contemporáneo y en un instrumento indispensable en la mayor parte de los dominios del pensamiento, de la ciencia y de la técnica. Por eso se impone enseñar los elementos básicos de la matemática de hoy a todos los alumnos del secundario, ya que cada uno de ellos puede muy bien tener que manejar más tarde esa matemática.

Felizmente, su desarrollo y la variedad de sus aplicaciones han modificado y humanizado profundamente la faz de esta ciencia.

Los progresos realizados a lo largo del último siglo la han transformado hasta en sus fundamentos y hoy la hacen aparecer más familiar, más inteligible, más precisa, más accesible, más interesante.

Antes, la enseñanza elemental de la matemática no podía presentar sino situaciones estereotipadas, que se trataban apelando, a menudo, a recursos no explícitos, a una intuición vaga, entremezcladas en forma desconcertante con pasajes técnicos.

Hoy es posible proceder en forma totalmente distinta y hacer participar a los principiantes en la construcción activa del edificio matemático a partir de situaciones simples y familiares.

Tal es el objetivo de este libro, que se dirige a todos los que quieren iniciarse en la matemática de hoy, cualquiera que sea su edad y su formación anterior.

Es adecuado, en particular, para los alumnos (de 12 años) de las clases de sexta que han adoptado el programa experimental oficial del Ministerio de Educación Nacional y de Cultura de Bélgica.

Esta obra es el resultado de la enseñanza efectuada a lo largo de los cinco últimos años en cursos de programa experimental. Su texto ha sido íntegramente enseñado a alumnos de 12 a 13 años.

La elección de los temas y métodos de enseñanza está de acuerdo con la Sinopsis de Dubrovnik (O.C.E.D. —Organización de Cooperación Económica y Desarrollo— 1960) y con las recomendaciones del Simposio de la Unesco (Budapest, 1962).

Los cinco primeros capítulos introducen al lector en el universo de la matemática actual que constituye la teoría de conjuntos. Se trata, por supuesto, de una exposición ingenua y descriptiva, que se ha querido, sin embargo, presentar

de manera tal que un estudio posterior de más hondura no exija ningún reacondicionamiento fundamental.

El álgebra de conjuntos introduce un cálculo cuyas reglas no son las mismas que las de la aritmética elemental, lo que permite, de modo especial, destacar los caracteres propios del cálculo algebraico usual. Se sabe, además, que el álgebra de conjuntos o álgebra de Boole tiene hoy un papel fundamental en la teoría de los circuitos y es de gran aplicación para quienes tienen que utilizar las grandes máquinas electrónicas. Hagamos notar también que las reglas relativas al máximo común divisor y al mínimo común múltiplo se obtienen posteriormente como una aplicación muy simple del álgebra de conjuntos.

En el capítulo VI, las nociones conjuntistas son utilizadas para la introducción clara y precisa de los primeros elementos de la geometría afín del plano. Los diagramas conjuntistas proporcionan un soporte intuitivo a la estructura lógica de la teoría.

En su concepción actual, la matemática es esencialmente relacional. Se interesa mucho más en las relaciones entre los objetos que en su naturaleza.

Los gráficos multicolores proporcionan un medio pedagógico eficaz para enseñar las nociones fundamentales de la teoría de las relaciones a partir de situaciones familiares.

Fue en 1959, después de bastantes ensayos infructuosos, cuando introdujimos este método en la enseñanza, en la Escuela Normal de Berkendael. Éste fue en seguida adoptado por los autores de la Sinopsis de Dubrovnik y recomendado por el informe del Simposio de Budapest.

En el capítulo VII se introducen las relaciones a partir de situaciones familiares que interesan a los niños y permiten aprovechar sus tendencias al juego. Estas relaciones no tienen necesariamente las amables propiedades de las relaciones importantes en la matemática; por eso estas últimas han sido tratadas en el capítulo VIII.

Las situaciones familiares introducen con toda naturalidad la composición de relaciones, que interesa presentar en su forma más general. La asociatividad de la composición de relaciones es un hecho fundamental que conviene tener en cuenta antes de haber reconocido las propiedades particulares de las relaciones consideradas.

Las nociones de equivalencia, de orden, de función, de permutación son indispensables en todas las ramas de la matemática. Su estudio constituye el objeto de los capítulos X a XIII.

El alcance de los temas estudiados en los trece primeros capítulos desborda ampliamente el marco de la matemática y constituye de hecho una iniciación en los procedimientos racionales utilizados corrientemente en todos los dominios del pensamiento, de la ciencia y de la técnica.

Señalemos en particular que los gráficos, utilizados aquí con un fin esen-

cialmente pedagógico, son de uso constante en las disciplinas más variadas, que van desde la teoría de los circuitos hasta la lingüística.

En el capítulo XIV presentamos transformaciones geométricas (respetando su condición de funciones). (En una situación sugerida por los alumnos, el lector advertido podrá reconocer la función compleja $f(z) = z/|z|$ *para* $z \neq 0$ *y* $f(0) = 0$.)

Las primeras nociones relativas al orden en geometría han sido introducidas en el capítulo XI y conducen a la noción de convexidad cuya importancia es tan grande en análisis y en programación lineal. El capítulo XV aclara más la noción de orden en relación con las proyecciones paralelas. Allí se presentan explícitamente, bajo forma de axiomas o de proposiciones, hechos muy a menudo escamoteados en las exposiciones tradicionales.[1]

El capítulo XVI proporciona medios intuitivos para un primer estudio de los números cardinales y la caracterización de los conjuntos finitos e infinitos según el punto de vista de Dedekind. El orden en los cardinales llevará al teorema de Bernstein, que eventualmente se puede admitir como axioma en este nivel de la enseñanza.

Los capítulos XVII y XVIII están consagrados a la adición y a la multiplicación de los naturales.

Hemos tomado especial cuidado en hacer una exposición que mantenga su validez para el estudio ulterior de los cardinales infinitos y, de tanto en tanto, hemos ido presentando, a título de ejercicios, algunos cálculos relacionados con el cardinal del infinito numerable. La experiencia ha mostrado que la teoría de la adición y de la multiplicación, presentada en relación directa con los conjuntos y las relaciones, interesa mucho a los alumnos, que gustan de establecer conexiones entre sus conocimientos anteriores de aritmética elemental y sus adquisiciones más recientes sobre conjuntos. Cada vez que presentemos dos demostraciones, que el lector o el estudiante retenga solamente la que juzgue más accesible. Como el alumno ha sido habituado desde el principio del libro a representar los objetos más diversos por letras, el cálculo literal se introduce con toda naturalidad y sin dificultad alguna.

En el capítulo XIX la numeración de posición es estudiada en el caso de la numeración binaria, utilizada por las máquinas electrónicas y reconocida cada vez más como un maravilloso medio pedagógico.[2]

El capítulo XX presenta el anillo de los enteros racionales, el marco más cómodo para el estudio de la aritmética. En él son estudiadas las ecuaciones en el grupo $Z, +$.

Los capítulos XVIII y XX contienen numerosos ejercicios que familiarizan al alumno con las técnicas del cálculo algebraico.

1. En la pequeña obra de PAPY-DEBBAUT, *Géométrie affine plane et nombres réels* (Presses Universitaires de Bruxelles, Bruselas, 1962, 65 p.), el lector interesado encontrará una exposición más avanzada de este tema, así como la demostración de proposiciones admitidas aquí como axiomas.
2. Con referencia a este tema, PAPY-DEBBAUT, obra cit., p. 38 y siguientes.

Los capítulos XXI a XXIII se proponen la edificación de la geometría afín del plano, orientada hacia las estructuras vectoriales, que dominan toda la matemática actual. A fin de evitar confusiones de lenguaje hemos reservado la palabra "vector" para los "vectores libres" o traslaciones. El "vector aplicado" ha sido simplemente llamado "par ordenado". Después de la introducción de la equipolencia, que es ocasión de numerosos ejercicios de construcción y de cálculo, se abordan las primeras demostraciones geométricas dignas de tal nombre. Están presentadas en forma de film o de bandas dibujadas que dan un soporte gráfico a la estructura misma de la demostración y ponen de relieve que ésta se desarrolla muy a menudo por esclarecimientos sucesivos, diferentes, de una misma situación. El acceso a la demostración se logra en varias etapas que conviene no superponer. La primera consiste en comprender el film y en poder explicarlo en un lenguaje no formalizado. La etapa siguiente consiste en reconstruir la demostración. Luego se exigirán explicaciones más formales. Y solo ulteriormente se pasará a la redacción propiamente dicha de la demostración.

Se ha querido desde el principio dar al alumno nociones que encuentren aplicación a lo largo de cualquier plan de estudios de esta materia. Así, el teorema 2 del capítulo XXI concierne a la proyección de equipolencias y prepara el teorema de Tales.

Las traslaciones están presentadas como clases de equipolencia y llevan en seguida al grupo conmutativo de las traslaciones, que introduce el primer cálculo vectorial. Señalemos la importancia pedagógica del grupo Π_0, $+$ *(grupo del plano puntual) isomorfo con el grupo de las traslaciones.*

En el capítulo XXIII se pasa al grupo de las traslaciones y simetrías centrales, cuyo estudio enriquece la visión del plano y enlaza íntimamente álgebra y geometría. Este capítulo es una preparación para el estudio ulterior del grupo de las isometrías.

Los grupos aparecen en este libro bajo formas muy diversas: de manera implícita en el capítulo IV con la diferencia simétrica; de manera explícita en el capítulo XIII (grupo de las permutaciones), en el capítulo XX (grupo aditivo de los enteros racionales), en el capítulo XXII (grupo de las traslaciones), en el capítulo XXIII (grupos de las traslaciones y simetrías centrales). Se ha dado, con esto, material suficiente para motivar un primer estudio de los grupos. Éste es emprendido al final del último capítulo, después de la introducción de los divertidos grupos cíclicos Del alcance de tal estudio tienen pruebas los alumnos cuando se abordan las ecuaciones en un grupo cualquiera, y ven las numerosas aplicaciones que pueden hacer de ellas en situaciones muy diversas.

Las notas históricas son puramente ocasionales y están dirigidas al alumnado.

Este libro ha sido redactado bajo la constante vigilancia de Frédérique. Solo su obstinada severidad ha permitido la realización de este trabajo. Le expreso toda mi afectuosa gratitud.

Agradezco a la señora Maddy Noël el haber releído importantes partes del manuscrito: sus observaciones han mejorado la redacción.

La señorita Cagnant es la autora de los dibujos, que son el alma de este libro; han sido hechos con talento y... una paciencia por la que le estoy reconocido.

Agradezco al señor Pierre Debbaut el haber confeccionado el índice de la obra, así como a los señores Lucien Delmotte y Joseph Lievens que participaron con él en la corrección de las pruebas.

Hago constar todo mi reconocimiento a las ediciones Didier por el cuidado excepcional consagrado a esta publicación.

Expreso, por último, mi afectuosa amistad a todas las gentiles alumnas de los cursos experimentales de la Escuela Normal de Berkendael, que han sido las alegres inspiradoras de esta obra.

Bruselas, enero de 1953.

PAPY

Agradecemos a los señores editores que, con toda cortesía, nos han permitido reproducir los dibujos de la obra *Grupos*.

1

Conjuntos

1 — La idea de **conjunto** es muy común.

Con distintos matices, es evocada por las palabras siguientes:
clase, conjunto, grupo, agrupación, colección, colectividad, tropa, equipo, familia, rebaño, tribu, clan, escuadrilla, enjambre, jauría, regimiento, muchedumbre, asociación, sociedad, escuela.

EJERCICIO — Da otras palabras que evoquen la idea de conjunto.

2 — EJEMPLOS

E1 Un conjunto de dos piezas formado por esta falda y esta blusa.
E2 Este enjambre de abejas.
E3 Esta tropa de soldados.
E4 Esta clase de alumnos.
E5 Este par de zapatos.
E6 Este rebaño de ovejas.
E7 Esta escuadrilla de aviones.
E8 El conjunto de aulas de nuestra escuela.
E9 El conjunto de mesas de este restaurante.
E10 El conjunto de las patas de las mesas de este restaurante.
E11 El conjunto de las cifras: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
E12 El conjunto de los teoremas de tal curso de geometría.
E13 Esta bolsa de zanahorias (conjunto de zanahorias).
E14 Este conjunto de bolsas de zanahorias.
E15 Este ramo de flores (conjunto de flores).
E16 El conjunto de los átomos de esta molécula de ácido sulfúrico.
E17 El conjunto de los vagones de este tren.
E18 El conjunto de las mesas y de las patas de las mesas de este restaurante.
E19 El conjunto de los nombres de los alumnos de nuestra clase
E20 El conjunto de los alumnos de nuestra clase.

3 — ***Un conjunto está determinado cuando se sabe qué objetos lo constituyen; cuáles son sus elementos.***

La palabra **objeto** se emplea aquí en un sentido muy amplio.

En el ejemplo E1, falda y blusa son objetos.
En el ejemplo E2, las abejas son objetos.
En el ejemplo E12, cada teorema es un objeto.
En el ejemplo E13, las zanahorias son objetos.
En el ejemplo E14, las bolsas de zanahorias son objetos.

Este último ejemplo muestra que los conjuntos se pueden tomar como objetos.

Todo conjunto es un objeto.

4 — ELEMENTOS

En el ejemplo E2, diremos que cada abeja es un elemento del enjambre.

En forma general diremos que un objeto de un conjunto **es un elemento** de ese conjunto. Diremos que el conjunto **contiene** a cada uno de sus elementos.

En lugar de decir que un objeto **es un elemento de un conjunto,** se dice también que ese objeto **pertenece** a ese conjunto.

Así diremos, en el caso del ejemplo E6, que tal oveja **pertenece** a tal rebaño.

En el ejemplo E1, una falda bien determinada y una blusa bien determinada son los únicos objetos del conjunto. Un botón cosido a la blusa, no es elemento del conjunto.

En el ejemplo E2, las alas de las abejas no son elementos del enjambre.

En el ejemplo E9, las patas de las mesas no son elementos del conjunto.

En el ejemplo E10, las mesas no son elementos del conjunto.

En el ejemplo E18, las mesas del restaurante y sus patas son los únicos elementos del conjunto.

En el ejemplo E6, ni las cabezas ni las patas de las ovejas pertenecen al rebaño.

5 — TÉRMINOS - IGUALDAD

En matemática, los objetos se representan a menudo por **términos** constituidos por un signo o una reunión de signos.

Así,

$$2\,,\,27\,,\,9 \times 3\,,\,54 : 2\,,\,6 + 6\,,\,2 + 3 - 5 + 4\,,\,1/2$$

son términos que representan respectivamente los objetos siguientes:

"el número dos",
"el número veintisiete",
"el número veintisiete",
"el número veintisiete",
"el número doce",
"el número cuatro",
"el número un medio".

Si dos términos designan el mismo objeto se dice que son iguales y se señala este hecho por medio del signo $=$, en la forma bien conocida:

$$27 = 9 \times 3$$
$$54 : 2 = 9 \times 3$$

En el caso contrario se utiliza el signo $\neq$. Así,

$$2 \neq 54 : 2$$
$$27 \neq 2 + 3 - 5 + 4$$
$$6 + 6 \neq 1/2$$

Los conjuntos serán frecuentemente designados por letras.

Si A designa el conjunto que contiene solamente los elementos 1, 3, 5, 7 y 9; si B designa el conjunto de los números enteros mayores que 0 y menores que 10; si C designa el conjunto de los enteros impares mayores que 0 y menores que 10,

se tendrá

$$A \neq B$$
$$B \neq C$$
$$A = C$$

que se escribirá, más brevemente,

$$B \neq A = C$$

6 — PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

Si a, b, c designan cada uno un objeto, se tienen las propiedades siguientes:

1. Para todo objeto a : $a = a$. (**Reflexibilidad** de la igualdad)
2. **Si** $a = b$, **entonces** $b = a$. (**Simetría** de la igualdad)
3. **Si** $a = b$ y $b = c$, **entonces** $a = c$. (**Transitividad** de la igualdad)

EJERCICIO — a, b, c, designan cada uno un objeto.

Si $a = b$ y $b = c$, **entonces** $c = a$ (**Circularidad** de la igualdad)

7 — EL SIGNO DE PERTENENCIA

Supongamos que a designa un objeto y que E designa un conjunto.
Si el objeto a pertenece al conjunto E se escribe

$$a \in E \qquad (1)$$

En caso contrario, se escribe

$$a \notin E \qquad (2)$$

Así, si designamos nuestra clase por C y a nuestra condiscípula Mónica por m, escribiremos

$$m \in C \qquad (3)$$

Si designamos por q el objeto don Quijote, deberemos escribir

$$g \notin C \qquad (4)$$

Si E es un conjunto, se cumple para todo objeto x una y solo una de las posibilidades $x \in E$ ***ou*** $x \notin E$.

8 — ¡FABRIQUEMOS CONJUNTOS SEGÚN NUESTRA FANTASÍA!

Habremos definido un conjunto E si para todo objeto t, resulta claro que se da una, y solo una, de las eventualidades

$$t \in E \qquad \text{o} \qquad t \notin E$$

Damos a veces un conjunto enumerando sus elementos. (Es lo que se llama una definición por *extensión*.)

Somos dueños de formar todo conjunto que nos plazca, poniendo juntos los objetos que se nos ocurra.

Ejemplos de conjuntos (Observar la notación que se entiende por sí sola)

E21 : H = { Carlos Chaplin, Walt Disney, Víctor Hugo

E22 : A = { este agente de policía, este pepino, esta pizca de sal

E23 : B = { esta flor, esta cacerola

EJERCICIOS

1. Ningún pétalo es elemento del conjunto B (del ejemplo E23).
2. La nariz del agente de policía no es elemento del conjunto A (del ejemplo E22).

9 — ESQUEMAS

Las alumnas han formado el conjunto siguiente:

E = { el pizarrón de pie, la silla del profesor, nuestra condiscípula Claudia }

Designemos el pizarrón por *p*, la silla por *s* y a Claudia por *c*.

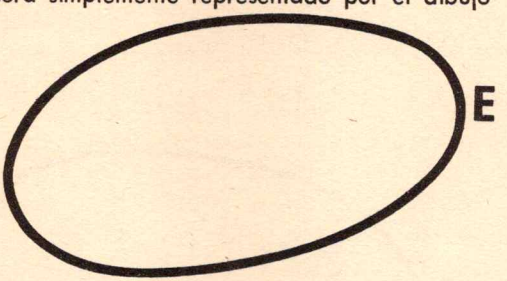
Se tiene, pues,

$$E = \{p, s, c.\}$$

Pero ellas quisieron indicar sin hablar ni escribir que habían formado un conjunto con estos objetos y para ello los cercaron con una larga cuerda atada en los extremos.

Este mismo recurso va a ser utilizado a menudo para *representar conjuntos gráficamente*. En estos gráficos nuestro propósito no va a ser representar ni situar los objetos; nos vamos a limitar a dibujar la cuerda.

Así, el conjunto E será simplemente representado por el dibujo



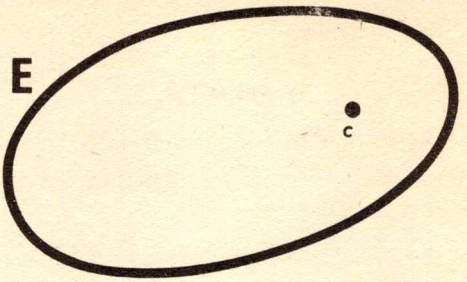
Convendremos en representar todo objeto por un punto. Un elemento del conjunto será representado por un punto interior a la cuerda; un objeto que no pertenezca al conjunto será representado por un punto exterior a la cuerda.

Todo objeto, pues, puede ser representado por un punto o bien interior, o bien exterior a la cuerda. Ningún objeto puede ser representado por un punto situado sobre la cuerda.

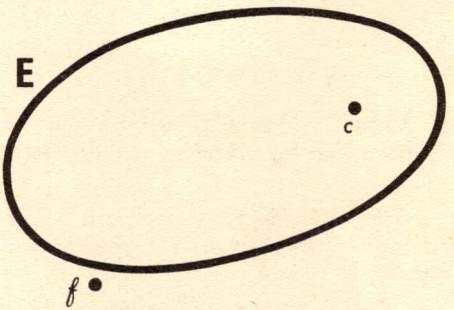
Solo marcaremos los puntos de los objetos sobre los cuales deseamos atraer la atención.

De acuerdo con esto, el dibujo anterior sirve perfectamente para representar el conjunto E.

Si queremos indicar que Claudia es elemento del conjunto E, marcaremos un punto que represente a Claudia.

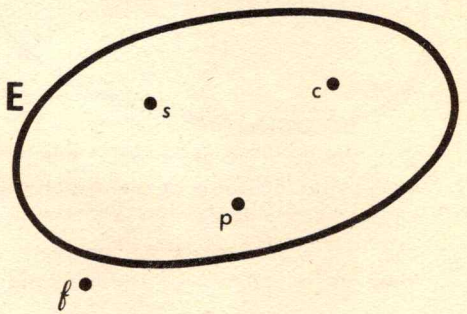


Expresemos gráficamente que la torre Eiffel, que designaremos por *f*, no es elemento de E.



Traduzcamos gráficamente las fórmulas

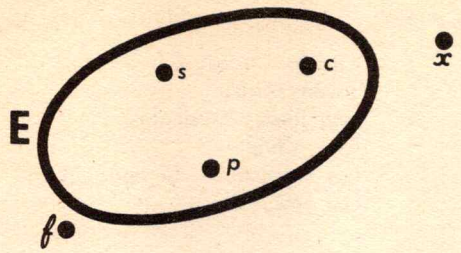
$$P \in E \quad , \quad s \in E \quad , \quad c \in E \quad , \quad f \notin E$$



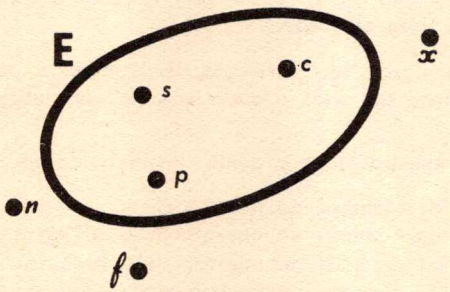
Sabemos que *p*, *s*, *c* son los únicos elementos del conjunto E.
Para todo otro objeto *x* se tendrá la fórmula

$$x \notin E$$

Llevemos esta información al gráfico



Si *n* designa la nariz de Claudia, $n \notin E$



10 — DEFINICIÓN POR COMPRENSIÓN

Se define a menudo un conjunto enunciando una propiedad *característica* de sus elementos, es decir, una propiedad que poseen todos sus elementos y solo ellos.

E24 — El conjunto C de las alumnas de nuestra clase que usan anteojos. (La propiedad es aquí: "ser alumna de nuestra clase y usar anteojos".)

Escribimos

$C = \{ x \mid x$ es alumna de nuestra clase y usa anteojos $\}$

que se lee

"C es el conjunto de los x ***tales que*** *x es alumna de nuestra clase y usa anteojos."*

Importa elegir con cuidado las propiedades y dejar de lado las que sean poco claras. La frase "las alumnas de nuestra clase que tienen los ojos azules" no permite definir un conjunto. En efecto, se ha pedido a dos de nuestras condiscípulas —una de ojos castaño oscuro y otra de ojos azul claro— que determinen, cada una por su cuenta, "las alumnas de nuestra clase que —*en su opinión*— tienen los ojos azules". ¡La primera de nuestras camaradas ha encontrado 10 alumnas de ojos azules y la segunda apenas ha contado 3!

La propiedad elegida era de naturaleza *subjetiva* (¡parece que depende particularmente del color de los ojos de quien hace la elección!) y no define un conjunto en el sentido de la matemática.

11 — PARES - CONJUNTOS UNITARIOS - CONJUNTO VACÍO

Las alumnas de nuestra clase pueden afiliarse a los siguientes clubes:

"Círculo Deportivo"
"Joven Teatro"
"Juventudes Musicales"
"Cine Club"
"Los Cazadores de Imágenes"
"Los Naturalistas"

Ninguna alumna puede afiliarse a más de dos clubes ni afiliarse simultáneamente al "Joven Teatro" y al "Cine Club".

Todas han entregado ya un papel firmado por el jefe de familia en el que indican los clubes que han elegido.

La situación es clara. La Secretaría de la escuela puede decir cuáles son las alumnas de cada clase afiliadas a cada uno de los clubes.

Limitémonos a nuestra clase y demos las definiciones siguientes:

K = conjunto de las alumnas de nuestra clase.
D = conjunto de las alumnas de nuestra clase afiliadas al "Círculo Deportivo".
T = conjunto de las alumnas de nuestra clase afiliadas al "Joven Teatro".
M = conjunto de las alumnas de nuestra clase afiliadas a las "Juventudes Musicales".
C = conjunto de las alumnas de nuestra clase afiliadas al "Cine Club".
I = conjunto de las alumnas de nuestra clase afiliadas al club "Los Cazadores de Imágenes".
N = conjunto de las alumnas de nuestra clase afiliadas al club "Los Naturalistas".

Cada alumna de nuestra clase será designada por una minúscula latina diferente. Tenemos, así,

$$K = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, u, v, w, x\}.$$

Casi todas las alumnas de nuestra clase se han afiliado al Círculo Deportivo; de manera más precisa:

$$D = \{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, t, v, x\}.$$

También la mayor parte de las alumnas han optado, sea por el "Joven Teatro", sea por el "Cine Club" Es lo que revelan las fórmulas

$$T = \{a, d, h, n\}$$
$$C = \{b, g, k, m, p, q, r, t, v, w, x\}.$$

Los otros tres clubes han tenido mucho menos éxito.

Solo las alumnas f y w han decidido dedicarse a criar renacuajos.

Escribimos

$$N = \{f, w\}$$

y diremos que el conjunto N es un **par.**

Las "Juventudes Musicales" han tenido todavía menos éxito: c es nuestra única melómana. Sigamos escribiendo

$$M = \{ c \}$$

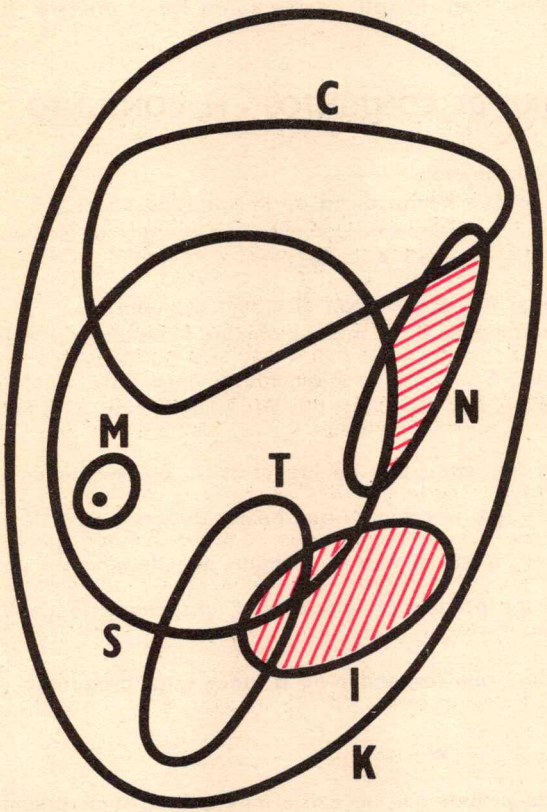
y diremos que el conjunto M es un **conjunto unitario.**

Ninguna de nuestras condiscípulas se ha afiliado al círculo "Los Cazadores de Imágenes". ¿No es natural señalar este hecho escribiendo

$$I = \{ \}$$

Diremos que I es **vacío.**

Vamos a representar los resultados de la elección por un diagrama en el cual rayaremos las regiones o zonas en las que no pueda haber puntos que representen alumnas.



EJERCICIOS

1. Se pide ubicar los puntos representativos de las alumnas en el esquema anterior.

2. Designemos por X el conjunto de las alumnas de nuestra clase que no se han afiliado a ningún club, por Y el conjunto de las que se han afiliado a un club y solo uno, por Z el conjunto de las que se han afiliado a dos clubes, por T el conjunto de las que se han afiliado a tres clubes. Se pide definir X, Y, Z, T por extensión, es decir, completar las fórmulas que siguen:

$$X = \{ \dots \}$$
$$Y = \{ \dots \}$$
$$Z = \{ \dots \}$$
$$T = \{ \dots \}$$

Se pide trazar sobre el último dibujo un diagrama de X, un diagrama de Y y un diagrama de T.
¿Quieres rayar todo lo que corresponda rayar en este dibujo?

12 — IGUALDAD DE CONJUNTOS - EL CONJUNTO

— Los conjuntos son objetos.
Apliquémosles lo que hemos dicho de la igualdad en el § 5.
Supongamos que A designe un conjunto y B designe un conjunto.
¿Cuándo se podrá escribir A = B?

— Si y solamente si A y B designan el mismo conjunto.
Es decir, si y solamente si los mismos objetos pertenecen a A y a B.

— Se tendrá, pues, A = B si y solamente si *para todo objeto t*, se tiene la misma respuesta para las dos preguntas: "*t*, ¿es elemento de A?', "*t*, ¿es elemento de B?"

Supongamos que cada una de las letras V, W designa un conjunto.

Nos advierten que el conjunto que hemos designado por V es vacío.

Nos advierten, además, que el conjunto que designamos por W es vacío.

Hagámonos las preguntas "el objeto *t*, ¿es elemento de V?"; "el objeto *t*, ¿es elemento de W?"

Vemos que hay que responder **no** a todas estas preguntas, cualquiera que sea el objeto *t*.

Por lo tanto, V = W.

Acabamos de probar que *no existe más que un solo conjunto vacío.*

Se lo designa por el símbolo ϕ.

Si a y b designan objetos distintos, existe un conjunto, y solo uno, que contiene a y b como únicos elementos. Se lo designa por $\{a, b\}$. ***Un conjunto tal se llama par.***

Existe un conjunto, y solo uno, que contiene a como único elemento. Se lo designa por $\{a\}$. ***Un conjunto tal se llama conjunto unitario.***

Existe un conjunto, y solo uno, que no contiene ningún elemento. Es el conjunto vacío designado por ϕ.

Existe un conjunto que contiene solo los números naturales 0, 1, 2, ... ***Se lo designa por*** ω.

Así, $\omega = \{x \mid x$ ***es un número natural*** $\}$.

Escribiremos también

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

EJERCICIOS

1. Da muchos términos que representen el objeto "el número veintiocho".
2. Se tiene $\{$Mónica, Gabriel $\} = \{$ Gabriel, Mónica$\} =$ $\{$Mónica, Mónica, Mónica, Gabriel $\}$.
3. Si $a \neq b$ se dice que el conjunto $\{a, b\}$ es un par.
   El conjunto $\{$Gabriel Becó, el padre del hijo de Gabriel Becó$\}$ ¿es un par?
4. La frase
   "las alumnas de nuestra clase que tienen los cabellos rubios"
   ¿permite definir un conjunto?
5. Define por extensión el conjunto de los naturales pares comprendidos entre **17** y **83**.
6. Da una definición por comprensión del conjunto $\{1, 2, 8\}$.
7. ¿Cuál es el conjunto de los naturales menores que 100 y divisibles a la vez por **13** y **17**?
8. Vamos a designar por *div* **12** el conjunto de los divisores de 12. Se tiene, entonces,

   $$div\ 12 = \quad x \mid x \text{ es un divisor de } 12 \ ;$$
   $$div\ 12 = \quad 1, 2, 3, 4, 6, 12 \ .$$

   La primera de estas fórmulas define *div* 12 *por comprensión.* La segunda define *div* 12 *por extensión.*
   ¿Quieres definir por extensión *div* **20**, *div* **72**, *div* **100**, *div* **13**, *div* **7**, *div* **19**, *div* **29**, *div* **2**, *div* **97**, *div* **1.024**?
   ¡Comenta los resultados obtenidos!
   Muestra que *div* $1 = \{1\}$ y que *div* $0 = \omega$.

9. Se tiene $\{ x \in \omega \mid 6 \text{ es un divisor de } x \} = \{0, 6, 12, \ldots\}$.
Este conjunto se indica también por $6\,\omega$.
En forma análoga da cuatro designaciones del conjunto de los múltiplos de 15.

10. Un número natural p se llama **primo** si, y solamente si, *div* p es un par.

Abreviando $\boxed{p \text{ primo} \iff \textit{div } p \text{ es un par.}}$

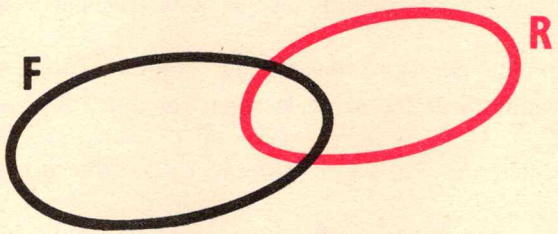
Muestra que 1 no es primo.
¿Qué puedes decir de *div* 1?

11. ¿Quieres definir por extensión el conjunto de los números primos que dividen a 18?
¿El de los primos que dividen a 1.024, 100, 7?
Comenta los resultados obtenidos.

12. Representa por puntos el reloj de tu profesor, el director de tu escuela, el borrador de tu clase, la luna.
Traza un diagrama del conjunto F que tiene estos únicos objetos como elementos.
Representa por un punto la aguja de las horas del reloj de tu profesor.

13. ¿Quieres representar en un esquema el conjunto C de las alumnas de tu clase, el conjunto D de las alumnas de tu clase que están con delantal, el conjunto A de las alumnas de tu clase que usan anteojos?

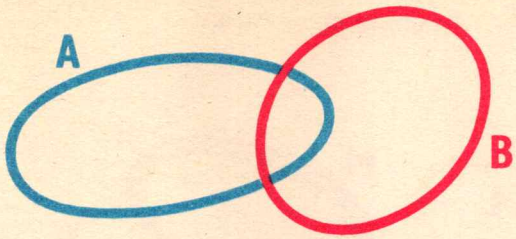
14. Designa por F el conjunto de las flores de un negocio y por R el conjunto de las rosas de ese negocio.
¿Quieres representar estos conjuntos en un mismo dibujo?
¿Quieres representar una violeta de ese negocio, una rosa de otro negocio?
El esquema siguiente, ¿habría sido irremediablemente malo?



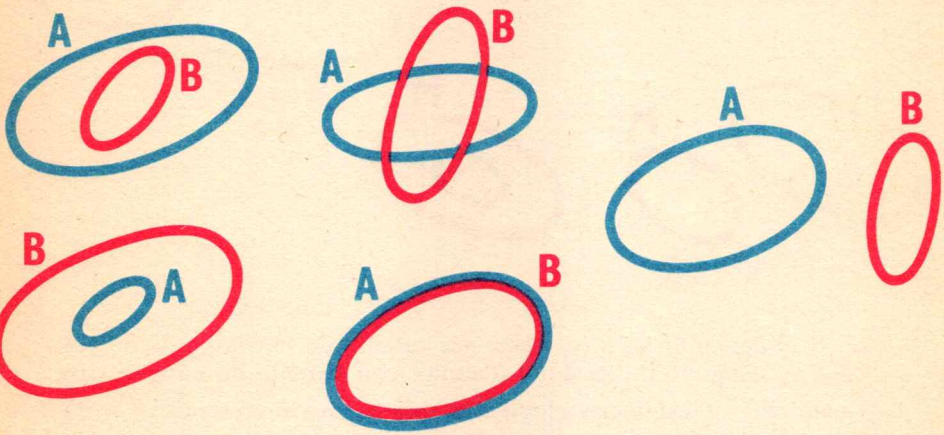
Mejora este esquema rayando las zonas vacías.

15. Se pide representar en un esquema el conjunto de los coches con patente de nuestro país, el conjunto de los Volkswagen con patente de nuestro país, el conjunto de los Citroën con patente de nuestro país, el conjunto de los Citroën 2 CV con patente de nuestro país, el conjunto de los coches con patente de nuestro país que no tienen refrigeración por agua.

16. Nos presentan el esquema siguiente:



Nos indican que A = B. ¿Qué zonas puedes rayar?
También los conjuntos A y B representados a continuación son iguales.



Rayar lo que corresponda.
¿Qué puedes decir además del esquema de la derecha?

17. Este camionero llega al mercado con una carga de zanahorias: un conjunto Z de zanahorias que vamos a representar por un diagrama. Cada bolsa de zanahorias define un conjunto que llamaremos simplemente bolsa.

Sea B una bolsa (= conjunto de zanahorias). ¿Quieres hacer un diagrama de B?

¿Cuáles son los objetos que se deben representar por puntos interiores a la cuerda de B?

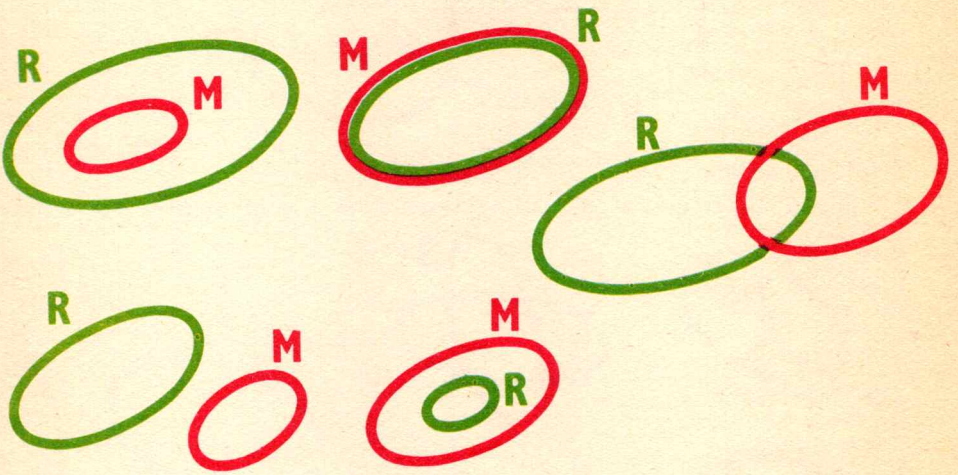
¿Cuáles son los objetos que se deben representar por puntos interiores a la cuerda de Z?

Todo objeto se puede representar por un punto, o bien interior a la cuerda de Z, o bien exterior a esta cuerda.

La bolsa B es un objeto. ¿Dónde ubicar un punto representativo de B?

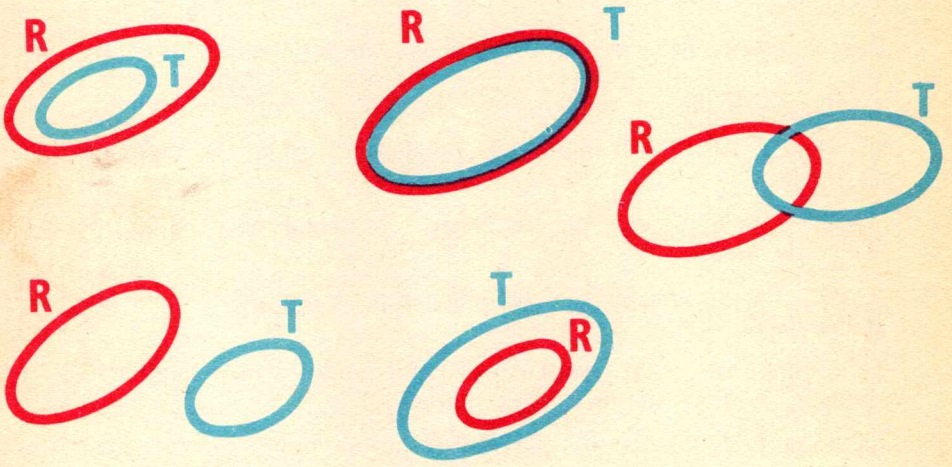
Se pide representar el conjunto de las bolsas de zanahorias.

18. Designemos por M el conjunto de los mamíferos y por R el de los rumiantes. Se pide señalar, entre los esquemas que siguen, los que sirven para representar M y R. ¡Raya las zonas vacías!

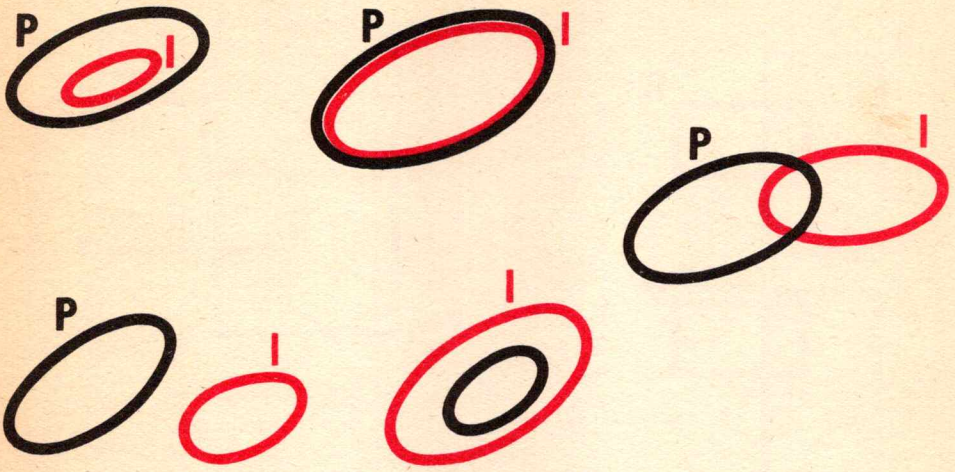


19. Sea R el conjunto de los coches con patente de nuestro país de color rojo. Sea F el conjunto de los Ford Taunus con patente de nuestro país.

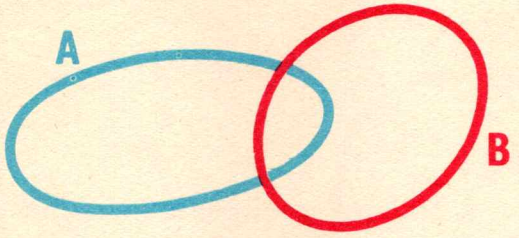
¿Cuáles de los esquemas siguientes sirven para representar R y F? Raya las zonas vacías.



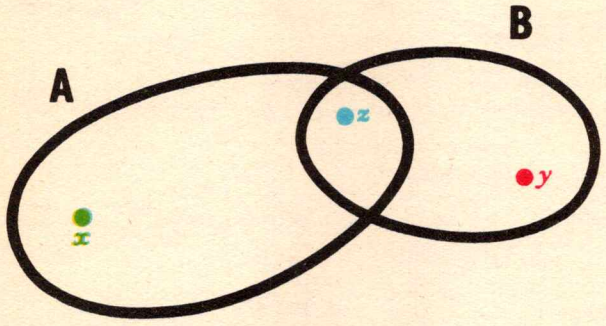
20. Sean P el conjunto de los números pares e I el de los impares. ¿Cuáles de estos esquemas sirven para representar P e I? Raya las zonas vacías.



21. Piensa dos conjuntos A y B. ¡No me digas nada! Ellos pueden estar representados por este esquema:

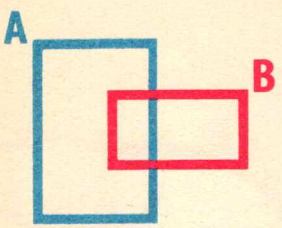


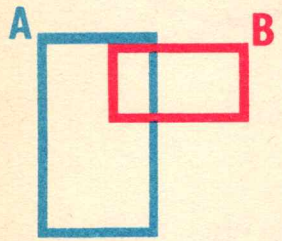
22. Explica este esquema:

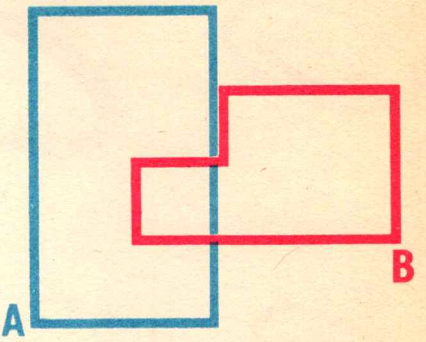


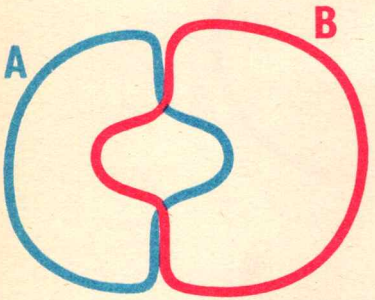
$x \in A$ $x \notin B$ $\quad$ $y \notin A$ $y \in B$ $\quad$ $z \in A$ $z \in B$ $\quad$ $t \notin A$ $t \notin B$

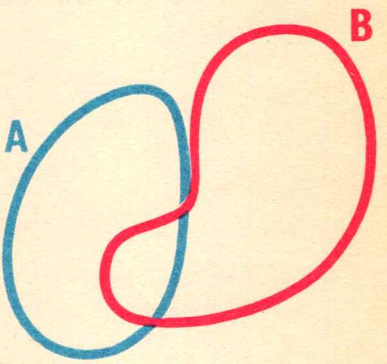
23. Piensa un conjunto A y un conjunto B. Ellos son representables por cada uno de los cinco esquemas siguientes:











Ponte en mi caso: no conoces los conjuntos A y B. ¡Imagina otros esquemas que puedan representarlos, *cualesquiera que sean A y B*!

24. El conjunto vacío ϕ es un objeto.

El conjunto unitario $\{\phi\}$ es el conjunto que tiene a ϕ como único elemento.

Para todo objeto t: $t \notin \phi$

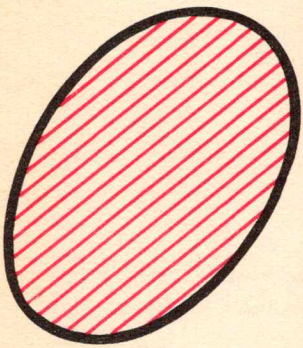
Por el contrario, $\phi \in \{\phi\}$

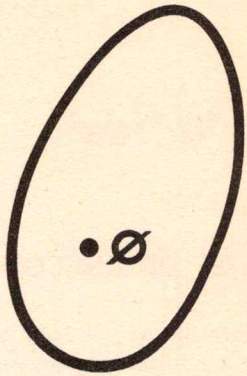
Luego, $\phi \notin \phi$ y $\phi \in \{\phi\}$

Explica la fórmula $\phi = \{\ \} \neq \{\phi\}$

Justifica el esquema

$\phi = \{\ \}$ $\qquad$ $\{\phi\}$





Se tiene la fórmula $\{\{\ \}\} = \{\phi\}$

25. Verifica las fórmulas

$$\phi = \{\ \} = \{x \mid x \neq x\}$$
$$\phi = \{\ \} = \{x \mid x = 1 \text{ y } x = 2\}$$
$$\{1, 2\} = \{x \mid x = 1 \text{ o } x = 2\}$$
$$\{9\} = \{x \mid x = 9\}$$

2

Partes

1 — PARTES DE UN CONJUNTO

De acuerdo con el lenguaje usual diremos que el conjunto A de las alumnas de la clase que usan anteojos es **una parte** (del conjunto C de las alumnas) de la clase.

Se señala este hecho escribiendo

$$L \subset C$$

Del mismo modo, el conjunto R de los rumiantes es una parte del conjunto M de los mamíferos, lo que se indica

$$R \subset M$$

De manera general, *se llama* ***parte de un conjunto E*** *todo conjunto P de elementos de E.*

Se indica que P es una parte de E por la fórmula $P \subset E$

Como E es un coniunto de elementos de E, se tiene la fórmula $E \subset E$

Toda parte de E diferente de E se llama ***propia***.

Como ϕ es un conjunto vacío de elementos de E, se tiene la fórmula

$$\phi \subset E$$

Se pueden obtener las partes de un conjunto considerando los elementos de ese conjunto que tienen una propiedad suplementaria.

Así, en el conjunto C de las alumnas de nuestra clase podemos distinguir la parte A formada por las alumnas de nuestra clase que usan anteojos.

Esto lo indicaremos en forma abreviada por la fórmula

$$L = \{ x \in C \mid x \text{ usa anteojos} \}$$

que se lee

"A es igual al conjunto de los x pertenecientes a C tales que x usa anteojos."

Del mismo modo

$$T = \{ x \in C \mid x \text{ está con delantal} \}$$

es la parte de C formada por las alumnas que están con delantal.

Como L y T son partes de C, escribimos

$$T \subset C, \quad L \subset C$$

También el conjunto de las alumnas de nuestra clase que miden más de 2 m es una parte de C.

Se ve claramente que

$$\phi = \{ x \in C \mid x \text{ mide más de 2 m} \} \subset C$$

Del mismo modo,

$$C = \{ x \in C \mid x \text{ mide más de 1 m} \} \subset C$$

Volvemos a encontrar las fórmulas

$$C \subset C \quad y \quad \phi \subset C$$

Se expresa también que A es una parte de B diciendo que A está **incluido** en B.

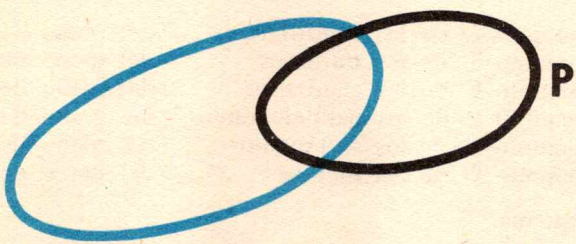
El signo $\subset$ se llama *signo de inclusión.*

En lugar de escribir $A \subset B$, para indicar lo mismo, se suele poner $B \supset A$, que se lee "***B contiene a A***".

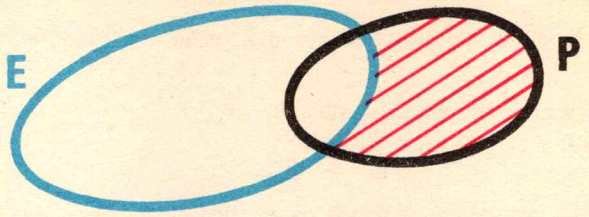
Si P es una parte del conjunto E, se puede representar esta situación por el esquema que sigue:

$P \subset E$

El esquema general



no es incompatible con P ⊂ E. Si se sabe que P es una parte de E, se reconoce en el esquema una zona vacía: conviene rayarla.



P ⊂ E

EJERCICIOS

1. Verifica las siguientes fórmulas:

$$div\ 18 \subset div\ 36 \subset div\ 108 \subset \omega$$
$$\omega \supset 2\,\omega \supset 6\,\omega \supset 60\,\omega \supset \{0\}$$
$$\{a, b, c\} = \{a, a, c, b\} \supset \{b, c\} \supset \{b\} = \{b, b\}$$

2. Si A designa el conjunto de las aves y G el conjunto de las gallinas, se tiene G ⊂ A.

3. Escribe las fórmulas de inclusión correspondientes a estos conjuntos:

El conjunto M de los habitantes de Montevideo,
el conjunto A de los habitantes de América,
el conjunto U de los habitantes del Uruguay,
el conjunto T de los habitantes de la Tierra,
el conjunto V de los seres vivientes.

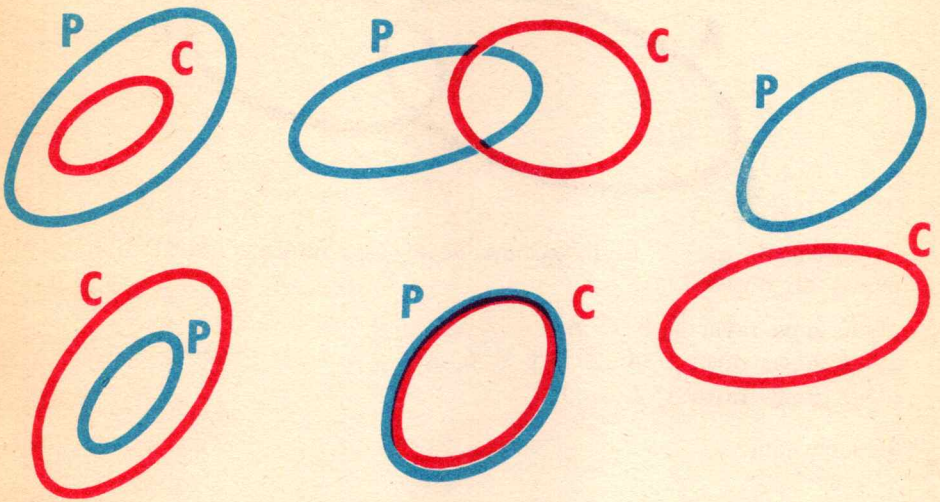
Te designo por *t*. ¿A cuáles de estos conjuntos pertenece *t*?

4. Escribe las fórmulas de inclusión correspondientes a estos conjuntos:

El conjunto Q de los cuadriláteros (del plano del pizarrón),
el conjunto T de los trapecios (del plano del pizarrón),
el conjunto C de los cuadrados (del plano del pizarrón),
el conjunto P de los paralelogramos (del plano del pizarrón),
el conjunto R de los rectángulos (del plano del pizarrón),
el conjunto O de los rombos (del plano del pizarrón).

Haz un esquema.

5. Sea C el conjunto de las alumnas de nuestra clase y P el conjunto de las alumnas de nuestra clase que pesan más de 100 kg. ¿Cuáles, entre los diagramas que siguen, sirven para representar C y P? En cada uno de los casos raya las zonas vacías.



6. La misma pregunta si P designa el conjunto de las alumnas de nuestra clase que pesan más de 10 kg.

7. La misma pregunta si P designa el conjunto de las alumnas cuyo peso está comprendido entre 25 y 35 kg.

2 — PROPIEDADES DE LA INCLUSIÓN

Si cada una de las letras A, B, C designa un conjunto, tenemos las fórmulas

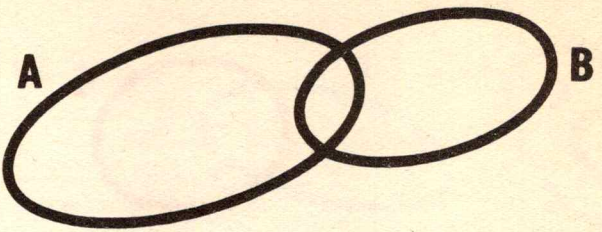
		$A \subset A$	(**reflexibilidad** de la inclusión),
Si $A \subset B$ y $B \subset C$,	**entonces**	$A \subset C$	(**transitividad** de la inclusión),
Si $A \subset B$ y $B \subset A$,	**entonces**	$A = B$	(**antisimetría** de la inclusión).

EJERCICIOS

1. Toda parte del conjunto de las alumnas de nuestra clase es una parte del conjunto de los alumnos de la escuela.

   Muestra manejando fórmulas que esta proposición resulta de la transitividad de la inclusión.

2. Si A y B designan cada uno un conjunto, sabemos que pueden ser representados por el esquema



Te advierten que $A \subset B$. ¿Cómo llevar esta información al dibujo (por medio de rayado)?

¿Qué zona rayar si $B \subset A$?
¿Qué zonas rayar si $A \subset B$ y $B \subset A$?
¿Qué zonas rayar si $A = B$?

¿Conclusión?

3 — CONJUNTO DE LAS PARTES DE UN CONJUNTO

Sean a, b, c, d objetos diferentes:

$$a \neq b, \quad a \neq c, \quad a \neq d, \quad b \neq c, \quad b \neq d, \quad c \neq d$$

Consideremos el conjunto E formado por estos objetos.

Luego, $E = \{a, b, c, d\}$

Se pueden enumerar todas las partes de E procediendo así:

Se sabe que ϕ es una parte de E: $\{\ \}$
a entra en juego, $\{a\}$
b entra en juego, $\{b\}, \{a, b\}$
c entra en juego, $\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$
d ... $\{d\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}$

Sabemos que cada una de las partes de E es un objeto y podemos considerar el conjunto formado por esos objetos.

Se designa por $\mathcal{P}E$ *el conjunto de las partes de E.*

$$\mathcal{P}E = \{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{d\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, E\}$$

Para todo conjunto X, designaremos por $\mathcal{P}X$ el conjunto de las partes de X. Luego,

$$\mathcal{P}X = \{P \mid P \subset X\}$$

que se lee, recordémoslo,

$\mathcal{P}X$ es el conjunto de los P tales que $P \subset X$;

... es decir, el conjunto de las partes de X.

Toda parte de un conjunto es un objeto y $\mathcal{P}E$ designa el conjunto de las partes del conjunto E.

EJERCICIOS

1. Sea E un conjunto.

¿Qué significa $A \subset E$?
¿Qué significa $A \in \mathcal{P}E$?

Para todo conjunto A, las fórmulas $A \subset E$ y $A \in \mathcal{P}E$ significan la misma cosa. Esto lo expresaremos abreviadamente así:

Para todo conjunto A: $A \subset E \iff A \in \mathcal{P}E$.

El signo $\iff$ se lee *"si y solamente si"* y se escribe también *ssi.*

2. Define por extensión (es decir, enumerando los elementos) los conjuntos

$$\mathcal{P}\{a, b\},\ \mathcal{P}\{a, b, c\},\ \mathcal{P}\{a\},\ \mathcal{P}\,\phi$$

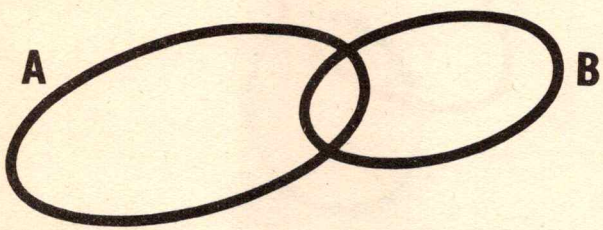
3. Si A y B son conjuntos,

o bien A es una parte de B, que se indica $A \subset B$,
o bien A no es una parte de B, que se indica $A \not\subset B$.

La fórmula $A \subset B$ no *implica* (o sea, no tiene inevitablemente por consecuencia) $B \subset A$.

Así, $b \neq c$ Luego $\{a, b\} \not\subset \{a, c\} \not\subset \{a, b\}$

4. Los conjuntos A y B están representados por el esquema general



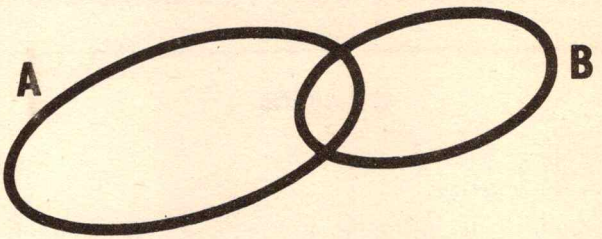
Nos advierten que $A \not\subset B \not\subset A$.
Lleva esta información al esquema dibujando exactamente dos puntos.

5. Sean E un conjunto y a, b, c, d objetos.

Se tienen, entonces, las *equivalencias*

$$(a \in E \text{ y } b \in E) \iff \{a, b\} \subset E$$
$$(a \in E \text{ y } b \in E \text{ y } c \in E \text{ y } d \in E) \iff \{a, b, c, d\} \subset E$$
$$a \in E \iff \{a\} \subset E$$

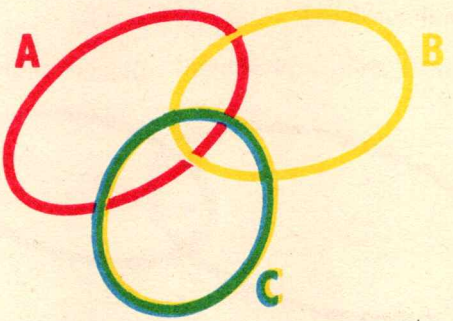
6. Haz 6 ejemplares del esquema general



Por rayado o marcando ciertos puntos, lleva a tus esquemas las informaciones siguientes:

$1_{er.}$ esquema : $A \subset B$
2° esquema : $A \subset B$ y $A \neq B$
$3_{er.}$ esquema : $A \not\subset B$
4° esquema : $A \subset B$ y $B \not\subset A$
5° esquema : $A = B$
6° esquema : $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$.

7. Los conjuntos A, B, C están representados por el esquema



¿Qué zonas puedes rayar sabiendo que A es el conjunto de las vacas, B el conjunto de los rumiantes y C el conjunto de los mamíferos? Propone un esquema más expresivo a primera vista.

8. Hacer lo mismo para la situación: A es el conjunto de las aves, B el conjunto de las avestruces, C el conjunto de los colibríes.

9. Hacer lo mismo para

$$A = \textit{div}\ 6;$$
$$B = \textit{div}\ 35;$$
$$C = \textit{div}\ 143.$$

10. Lo mismo para

A = conjunto de las letras de la palabra *grande;*
B = conjunto de las letras de la palabra *pesado;*
C = conjunto de las letras de la palabra *luz.*

11. Lo mismo para

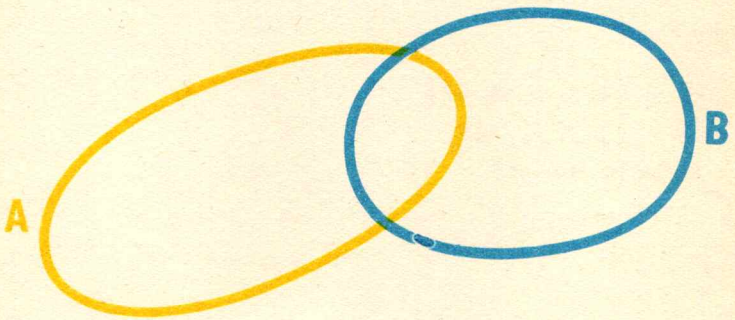
$$A = \{2, 3, 7, 13, 97\};$$
$$B = \{3, 7, 13, 19\};$$
$$C = \{2, 19, 31\}.$$

3

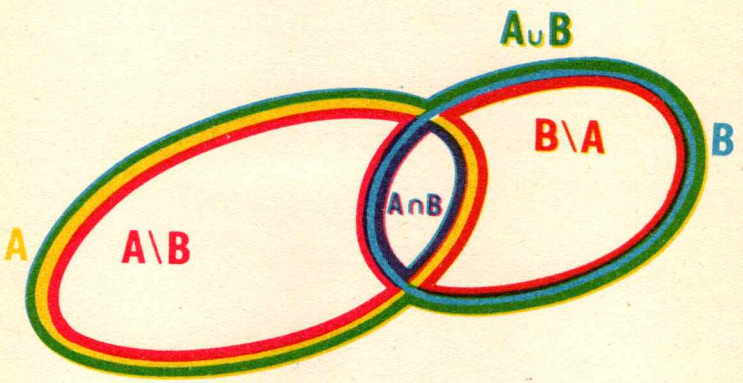
Intersección - Unión - Diferencia

$\cap$ $\cup$ $\setminus$

Nos dan los conjuntos A y B. Sabemos que pueden ser representados por el esquema



Este esquema pone en evidencia nuevos conjuntos.



DEFINICIONES

La ***intersección*** $A \cap B$ *es el conjunto de los objetos que son* ***a la vez*** *elementos de A y de B.*

La ***unión*** $A \cup B$ *es el conjunto de los objetos que son elementos de* ***uno, por lo menos,*** *de los conjuntos A, B.*

La ***diferencia*** $A \setminus B$ *es el conjunto de los objetos que son elementos de A y no de B.*

El término $A \cap B$ se lee "A inter B".

El término $A \cup B$ se lee "A o B".

El término $A \setminus B$ se lee "A menos B".

Se tiene, entonces,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ y no } x \in B\}$$

El empleo de la conjunción **y**, en la primera fórmula, es absolutamente conforme al uso corriente.

El empleo de **o**, en la segunda fórmula, es más preciso que en el uso corriente.

La fórmula „$x \in A$ **o** $x \in B$" significa **aquí** que *una, por lo menos,* de las fórmulas $x \in A$, $x \in B$ *es verdadera* (¡puede ser entonces que las dos fórmulas sean verdaderas!).

Se tiene también la fórmula

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

EJEMPLO — Si R es el conjunto de las rosas de este negocio y A el conjunto de las flores amarillas de este negocio,

$A \cap$ es el conjunto de las rosas amarillas (de este negocio).

$A \cup$ es el conjunto de las flores del negocio que satisfacen **una, por lo menos,** de las condiciones: ser una rosa **o** ser amarilla.

$A \setminus$ es el conjunto de las rosas (del negocio) que no son amarillas.

$B \setminus$ es el conjunto de las flores amarillas (del negocio) que no son rosas.

Si no hay rosas amarillas en el negocio,

$$A \cap B = \phi$$

Se dice entonces que los conjuntos R y A son **disjuntos**.

Podría ocurrir que todas las rosas del negocio fueran amarillas. Esta situación se traduce inmediatamente de dos maneras diferentes, pero equivalentes.

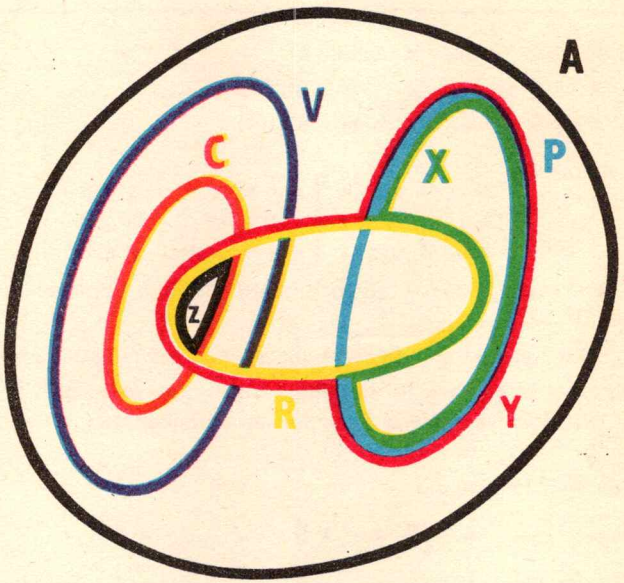
$$A \subset B \iff A \setminus B = \phi$$

Veremos más adelante otras fórmulas que describen esta situación.

¿Cómo expresarías que todas las flores amarillas del negocio son rosas?

EJERCICIOS

1. Se pide presentar en un esquema el conjunto A de los automóviles con patente de nuestro país, el conjunto V de los Volkswagen con patente de nuestro país, el conjunto P de los Peugeot con patente de nuestro país, el conjunto R de los automóviles rojos con patente de nuestro país, y el conjunto C de las camionetas Volkswagen con patente de nuestro país



Se pide mostrar un 4 CV rojo con patente de nuestro país, una camioneta Volkswagen negra con patente de nuestro país, una camioneta Citroën azul con patente de nuestro país, un Peugeot color arena con patente de nuestro país, una camioneta Volkswagen roja con patente de nuestro país, el coche personal de John Glenn, una flor, el volante de un Volkswagen azul con patente de nuestro país.

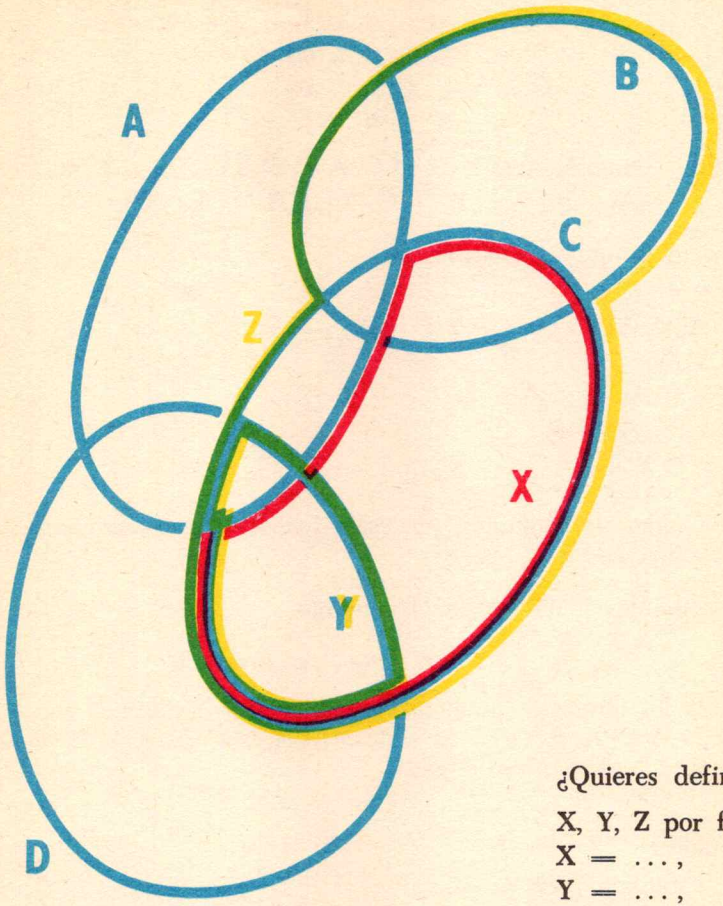
¿Por qué término designarías el conjunto de las camionetas Volkswagen con patente de nuestro país y que no son de color rojo? Dibuja un diagrama de este conjunto sobre el esquema anterior.

Hacer lo mismo con el conjunto de los Peugeot rojos con patente de nuestro país, así como con el conjunto de todos los automóviles con patente de nuestro país que tienen, por lo menos, una de las dos propiedades siguientes: ser de marca Volkswagen o ser de color rojo.

Se pide caracterizar cada uno de los conjunto X, Y, Z (que están representados en el esquema precedente) y dar la definición por una fórmula):

$X = P \setminus R$; $Y =$; $Z =$

2. Observa este dibujo



¿Quieres definir

X, Y, Z por fórmulas

$X = \ldots,$

$Y = \ldots,$

$Z = \ldots,$

en cuyos segundos miembros figuren únicamente los símbolos A, B, C, D, $\cap$, $\cup$, $\setminus$ y paréntesis?

3. Se tienen las fórmulas $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Pero no se tiene, en general,

$$A \setminus B = B \setminus A$$

Da conjuntos A y B para los cuales $A \setminus B \neq B \setminus A$

¿Es verdad que

si $A \setminus B = B \setminus A$, **entonces** $A \setminus B = \phi = B \setminus A$

4. $\{-1000, -999, 0, 1, 2, 3\} \cap \{0, 1, 2\} = ?$

5. Sean

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$
$$C = \{2, 5, 7, 9, 10\}$$
$$D = \{2, 6, 8, 10\}$$

Calcula: $A \cap A$, $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cap D$, $D \cap A$, $C \cap A$, $B \cap A$
$(A \cap B) \cap C$, $B \cap (C \cap D)$, $A \cap (B \cap C)$

6. Sea A un conjunto. Calcula

$A \cap A$
$(A \cap A) \cap (A \cap (A \cap A))$
$A \cap \phi$
$\phi \cap A$
$\phi \cap (A \cap \phi)$
$\phi \cap \phi$

7. Da ejemplos de conjuntos que estén incluidos en el conjunto de los alumnos de tu clase.

8. Dar conjuntos incluidos en el conjunto

$$\{1, 2, -5, 100, 200, 999\}$$

9 Calcula los términos siguientes, en los cuales A designa un conjunto cualquiera : $A \cup A$, $A \cap A$, $A \setminus A$, $\phi \cup A$, $\phi \cap A$, $\phi \setminus A$, $A \cup \phi$, $A \cap \phi$, $A \setminus \phi$, $\phi \cup \phi$, $\phi \cap \phi$, $\phi \setminus \phi$

10. Calcula

$div\ 72 \setminus div\ 52 =$	$div\ 512 \cup div\ 729 =$
$div\ 1.000 \cap div\ 625 =$	
$3\ \omega \setminus 2\ \omega =$	$2\ \omega \cup 4\ \omega =$
$5\ \omega \cap 7\ \omega = \ldots\ \omega$	$17\ \omega \cap div\ 17 =$

11. Escribe las fórmulas de inclusión correspondientes a estos conjuntos:

El conjunto Q de los cuadriláteros (del plano del pizarrón),
el conjunto T de los trapecios (del plano del pizarrón),
el conjunto C de los cuadrados (del plano del pizarrón),
el conjunto P de los paralelogramos (del plano del pizarrón),
el conjunto R de los rectángulos (del plano del pizarrón),
el conjunto O de los rombos (del plano del pizarrón).

Calcula $L \cap R$, $Q \cap P$, $C \cup R$, $L \setminus Q$

Traza un esquema de la situación.

12. Sea T el conjunto de los triángulos del plano, E el conjunto de los triángulos equiláteros, I el conjunto de los triángulos isósceles, R el conjunto de los triángulos rectángulos, B el conjunto de los triángulos obtusángulos.

Escribe las fórmulas de inclusión correspondientes a estos conjuntos.

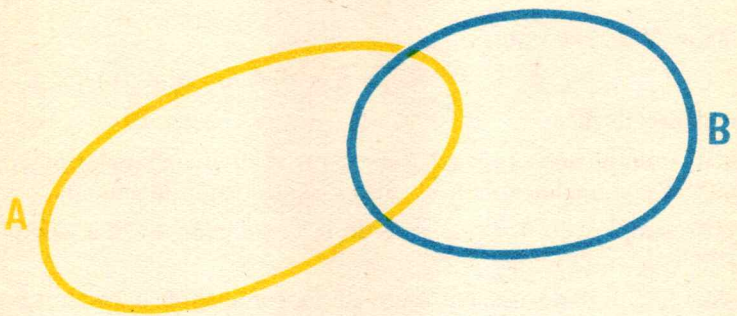
Calcula $E \cap R$, $E \cap B$, $R \cap B$, $T \cap I$, $T \cup I$, $I \setminus T$.

Describe los elementos de $I \cap B$, $T \setminus I$.

13. Ayudándote con un dibujo muestra que

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$
$$A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$$

14. Sabemos que los conjuntos A y B pueden siempre estar representados por este esquema:



Una persona que lleva un sombrero negro declara que $A \setminus B = A$.
Usa rayado negro para llevar esta información al esquema.

Una persona con sombrero rojo declara que $A \cap B = \phi$.
Sírvete de rayado rojo para llevar esta información al esquema.

Llegar a la conclusión de que, en distinta forma, las dos personas han dicho la misma cosa.

Sus declaraciones son equivalentes.

Lo cual se escribe así:

$$A \setminus B = A \iff A \cap B = \phi$$

15. Verifica la fórmula

$$A \setminus B = A \iff A \cap B = \phi \iff B \setminus A = B$$

16. Por el procedimiento descrito en el ejercicio 14 justifica las fórmulas

$$A \subset B \iff A \cap B = A$$
$$A \subset B \iff A \cup B = B$$
$$A \subset B \iff A \setminus B = \phi$$

Finalmente,

$$A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B \iff A \setminus B = \phi \iff B \supset A.$$

17. Por el procedimiento del ejercicio 14 justifica la fórmula

$$A \setminus B = B \setminus A \iff A = B$$

18. Si A, B, C son conjuntos, se tiene siempre la fórmula:

$$(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$$

Te informan que los conjuntos K y L son tales que

$$(K \cup L) \setminus L = K$$

¿Qué te revela esta información?

(Utiliza el resultado obtenido en el ejercicio 14.)

19. Hemos escrito poco antes

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Si tu padre te dice:

"Para tu cumpleaños te regalaremos un reloj **o** una máquina fotográfica", ¿utiliza la conjunción **o** con el mismo sentido que la matemática?

Da dos ejemplos de uso corriente de la conjunción **o** coincidente con el uso matemático.

Da dos ejemplos de uso corriente de la conjunción **o** con un sentido diferente del único admitido en matemática.

20. En un mismo dibujo traza diagramas de los conjuntos siguientes:

H: el conjunto de los seres humanos.
E: el conjunto de los europeos.
P: el conjunto de los peruanos.
A: el conjunto de los actores de cine.
C: el conjunto de los cantantes.

Ubica en el dibujo estos objetos:

Rubén Darío, esta zanahoria, Pablo Neruda, Jerry Lewis, este broche de ropa, este gato, Nasser, Bolívar, Brigitte Bardot, Lenin, la oreja izquierda de esta alumna, Picasso, Isabel II, el pizarrón de tu clase, Hernán Cortés, Kennedy, Cantinflas.

En el mismo dibujo traza los diagramas de

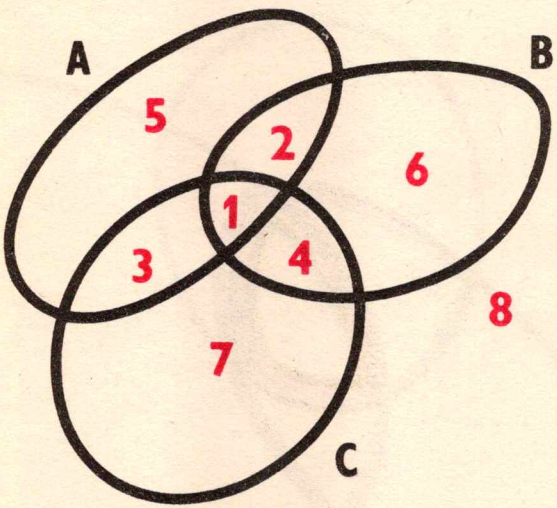
$(A \cap C) \setminus (Y \cup F)$, $(A \cap Y) \setminus C$

4

Álgebra de conjuntos

1 — EL DIAGRAMA "HOJA DE TRÉBOL"

Piensa tres conjuntos A, B, C. Sin que me digas nada de ellos, sé que podré representarlos por el diagrama en hoja de trébol que aquí vemos.



En efecto, sé que para todo objeto x hay 8 respuestas posibles a la triple pregunta "¿x pertenece a A, x pertenece a B, x pertenece a C?":

1 sí, sí, sí,
2 sí, sí, no,
3 sí, no, sí,
4 no, sí, sí,
5 sí, no, no,
6 no, sí, no,
7 no, no, sí,
8 no, no, no.

Luego nuestro esquema nos va a permitir ubicar x cualquiera que sea la respuesta dada. El diagrama abarca, pues, todos los casos.

Si me das algunas informaciones suplementarias sobre tus conjuntos, podremos tal vez rayar ciertas zonas del esquema y tal como quede lo seguiremos usando.

Si no me dices nada con respecto a A, B, C, también podré servirme del esquema sin preocuparme de la existencia eventual de zonas vacías.

2 — ASOCIATIVIDAD DE LA INTERSECCIÓN Y DE LA UNIÓN

Sean 3 conjuntos A, B, C. Represéntalos por el diagrama "hoja de trébol".
Dibuja en rojo un diagrama de $(A \cap B) \cap C$
Dibuja en verde un diagrama de $A \cap (B \cap C)$
¿Qué compruebas?

Cualesquiera que sean los conjuntos A, B, C, se tiene la fórmula

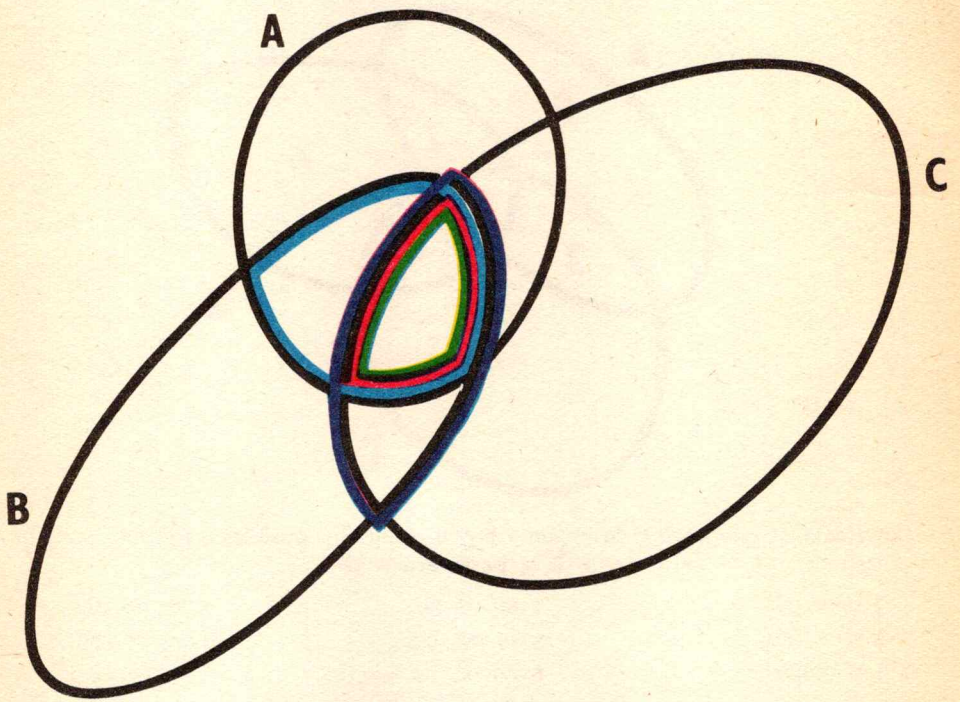
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Esto se expresa también diciendo que **la intersección es asociativa.**

La fórmula $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ muestra que de cualquiera de las dos maneras que se pongan los paréntesis en $A \cap B \cap C$ se tiene el mismo resultado.

Podemos escribir, en consecuencia,

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$



$$\underline{(A \cap B)} \cap C = A \cap \underline{(B \cap C)}$$

Queda a tu cargo probar del mismo modo la **asociatividad de la unión.**

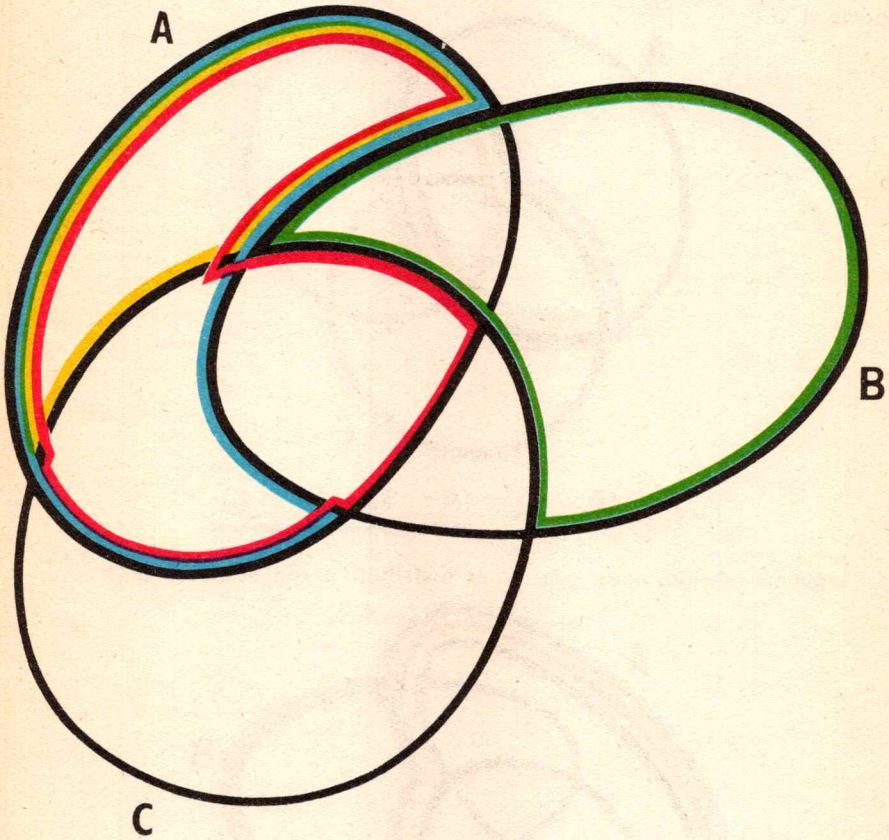
Como en el caso de la intersección, se tendrá que, cualesquiera que sean los conjuntos A, B, C,

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

3 — NO ASOCIATIVIDAD DE LA DIFERENCIA

Acabamos de ver que las **leyes** $\cap$ y $\cup$ son asociativas.
Propongámonos comparar

$$(A \setminus B) \setminus C \text{ y } A \setminus (B \setminus C)$$



$(A \setminus B) \setminus C$ $\qquad$ $A \setminus (B \setminus C)$

Vemos que la ley $\setminus$ **no** es **asociativa**.
¿Quieres justificar la fórmula

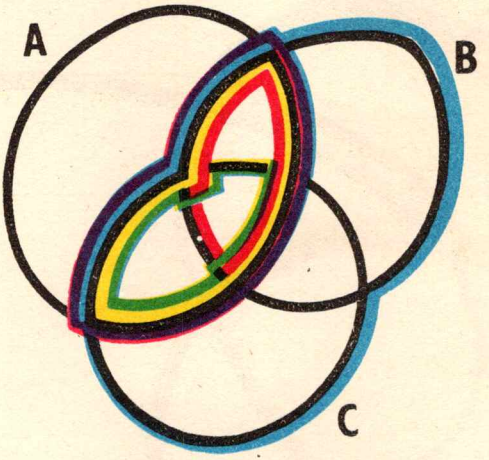
$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$$

4 — DISTRIBUTIVIDAD

Los esquemas siguientes muestran que **cualesquiera que sean los conjuntos A, B, C** se tienen las fórmulas

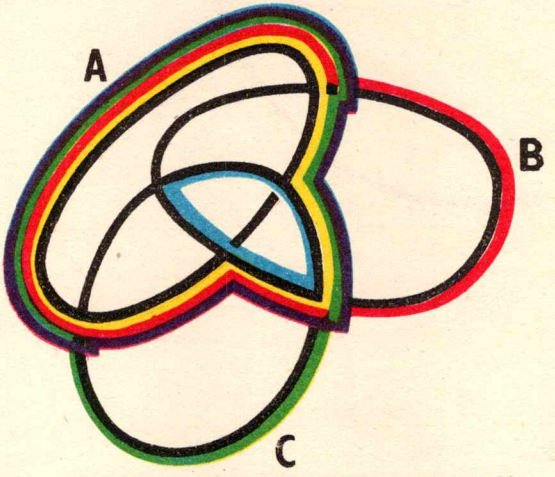
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

La primera de estas fórmulas se traduce diciendo que $\cap$ es **distributiva con respecto a** $\cup$.



$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

La segunda expresa, pues, que $\cup$ es **distributiva con respecto a** $\cap$.



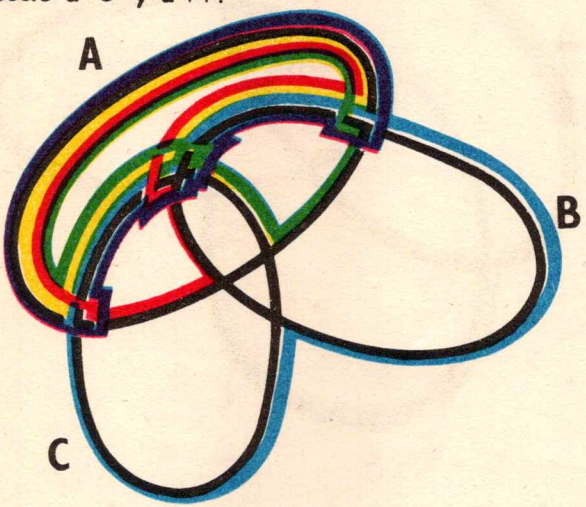
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

5 — ANTIDISTRIBUTIVIDAD

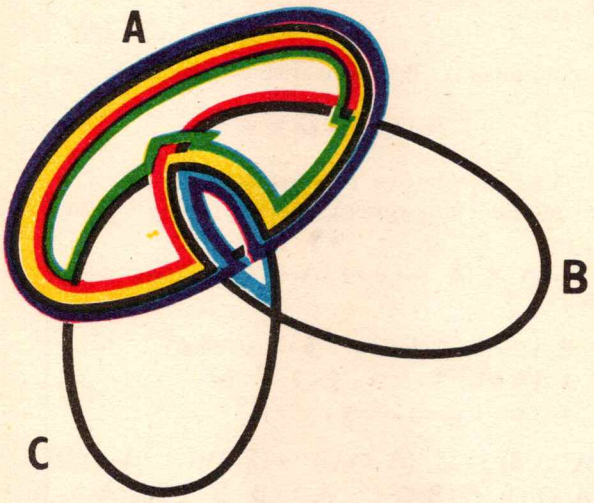
Cualesquiera que sean los conjuntos A, B, C, se tienen las fórmulas

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Estas fórmulas se traducen diciendo que **la diferencia es antidistributiva a la derecha con respecto a $\cup$ y a $\cap$.**



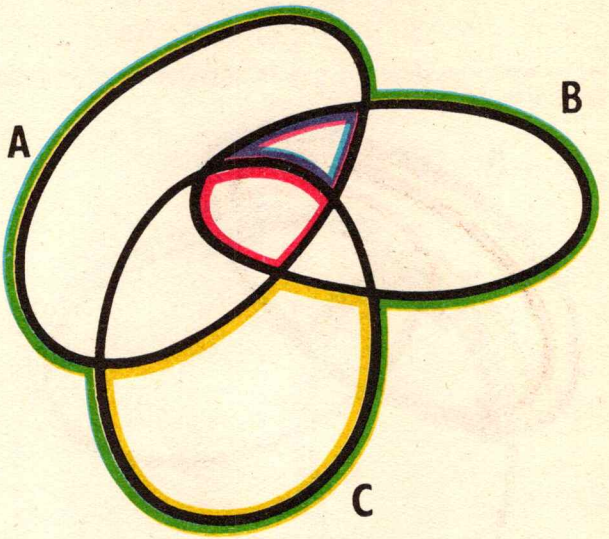
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$



$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

EJERCICIOS

1. El diagrama "hoja de trébol" pone en evidencia nuevos conjuntos.



$A \cap B \cap C$ $A \cup B \cup C$ $(A \cap B) \setminus C$ $C \setminus (A \cup B)$

Comenta el esquema anterior y justifica el empleo de colores.
Representa por fórmulas análogas otros 4 conjuntos puestos en evidencia por este esquema.

2. Si dos de los conjuntos A, B, C son disjuntos se tiene que

$$A \cap B \cap C = \phi$$

3. Muestra que $\cap$ es distributiva con respecto a $\setminus$.
Dicho de otro modo: cualesquiera que sean los conjuntos A, B, C se tiene la fórmula

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$

4. Sean $A = \{0, 1, -1, 3, -3, 5, -5, 7, -7\}$
$B = \{0, 1, 3, -3, 5, 7, -7\}$
$C = \{0, 1, -3, -5, -7\}$

Calcula: $(A \cup B) \cap C$, $(A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C$, $(A \cup C) \cap (B \cup C)$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $(A \setminus B) \setminus C$, $A \cap B$, $B \cap A$, $A \cup \phi$, $\phi \cup A$, $A \cap \phi$, $\phi \cup A$, $\phi \cup C \cup \phi$, $C \cap \phi \cap \phi \cap C$, $A \cup A$, $A \cap A$, $B \setminus \phi$, $\phi \setminus B$

5. Para conjuntos cualesquiera A, B, C,

$$A \cup B \cup C = C \cup B \cup A = B \cup C \cup A = A \cup C \cup B = B \cup A \cup C = C \cup A \cup B$$

La unión $A \cup B \cup C$ es el conjunto de los objetos que pertenecen, por lo menos, a uno de los conjuntos A, B, C.

Haz observaciones análogas con respecto a la intersección.

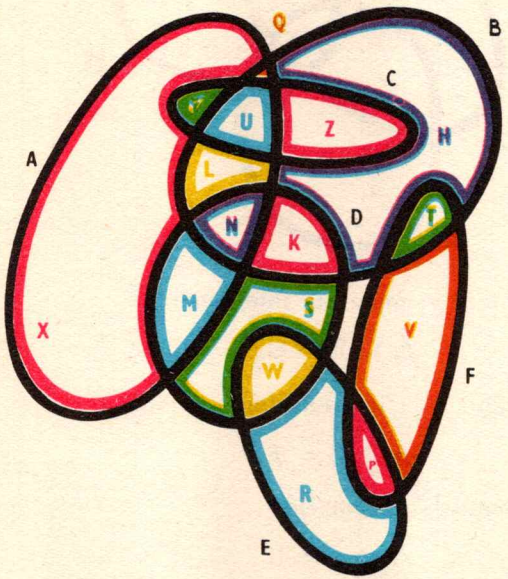
6. Para conjuntos cualesquiera A, B, C se tienen las fórmulas siguientes:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$
$$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$$
$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) = (A \setminus C) \setminus B = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

7. A, B, C, D, E, F son conjuntos que se pueden representar por el esquema que sigue. Se pide definir los conjuntos H, K, L, M, N, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, por fórmulas

$$H = B \setminus (A \cup C \cup D \cup F)$$
$$K = \ldots \qquad \text{etc.}$$

en cuyos segundos miembros no figuren más signos que A, B, C, D, E, F, $\cap$, $\cup$, $\setminus$ y paréntesis.



8. Si A, B, C son conjuntos, se tiene

$$A \subset B \subset C \iff A \cup B = B \cap C$$

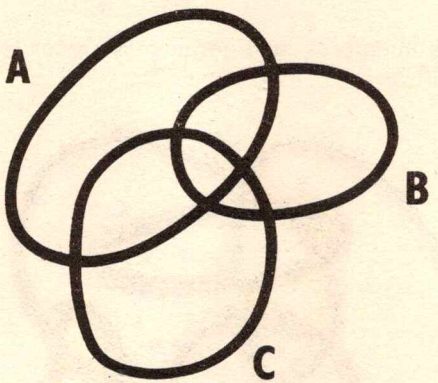
9. Si A, B, C, son conjuntos, se tienen las fórmulas

$$\begin{aligned}(A \setminus B) \cap C &= (A \cap C) \setminus (B \cap C) \\ &= (A \cap C) \setminus B = (A \setminus B) \cap (C \setminus B) \\ A \cap (B \setminus C) &= (A \cap B) \setminus (A \cap C) \\ &= (A \setminus C) \cap B = (A \cap B) \setminus (B \cap C) \\ &= (A \cap B) \setminus C \\ &= (A \setminus C) \cap (B \setminus C)\end{aligned}$$

10. Si A, B, C, D son conjuntos, se tienen las fórmulas

$$(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$$
$$(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D)$$
$$(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$$

11. Reproduce 3 veces el diagrama



a) Lleva al primer ejemplar la información

$$A \cup B = C$$

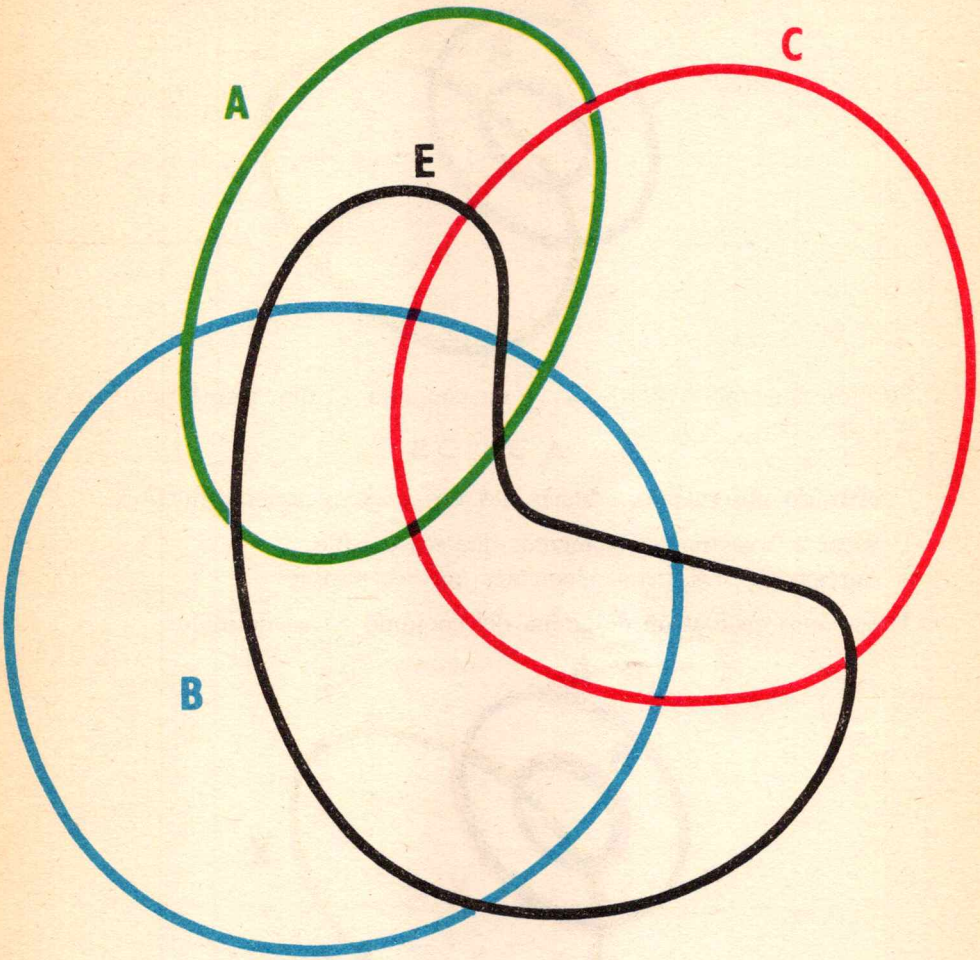
b) Lleva al segundo la información

$$A \cap B = \phi$$

c) Lleva al tercero la información

$$A \neq \phi \neq B$$

12. Si piensas 4 conjuntos A, B, C, E, podré, sin que me digas nada, representarlos por el diagrama que sigue:



13. Reproduce 3 veces el diagrama precedente:

a) Lleva al primer ejemplar la información

$$E = A \cup B \cup C$$

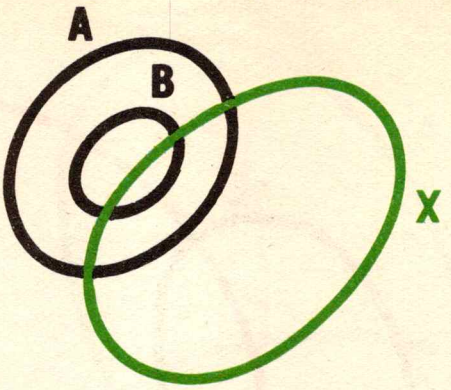
b) Al segundo, lleva la información "los conjuntos A, B, C son disjuntos 2 a 2", que traduce la fórmula

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = \phi$$

c) Al tercero, lleva la información

$$A \neq \phi \ , \ B \neq \phi \ , \ C \neq \phi$$

14. Te dan un conjunto A, una parte B de A y un conjunto X cualquiera.



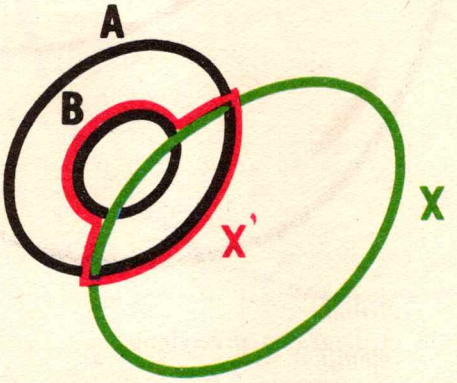
Se pide construir a partir de X un conjunto X' que forme "sandwich" con A y B:

$$A \supset X' \supset B$$

Construirlo observando, además, las dos prescripciones siguientes:

1. Sacar a X los menos elementos que sea posible.
2. Agregar a X los menos elementos que sea posible.

Trazaremos en rojo un diagrama del conjunto X' así definido:



Se tiene la fórmula $X' = A \cap X \cup B$

En el término $A \cap X \cup B$, se han omitido los paréntesis porque

$$(A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B)$$

Justifica esta fórmula sirviéndote del diagrama. Prueba después por el cálculo que

$$A \supset B \Rightarrow (A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B)$$

(expresión en la que $\Rightarrow$ se lee "*implica*").

15. Diferencia · simétrica

Se llama diferencia simétrica de los conjuntos A, B al conjunto de los objetos que pertenecen a uno, y solo uno, de los conjuntos A, B. La indicaremos por A Δ B.

Se ve claramente que $A \Delta B = B \Delta A$

La diferencia simétrica es conmutativa.

Para todo objeto x se pueden presentar estos casos:

1.	$x \in A$	$x \in B$
2.	$x \in A$	$x \notin B$
3.	$x \notin A$	$x \in B$
4.	$x \notin A$	$x \notin B$

Indica en cada uno de los casos si $x \in A \Delta B$ o si $x \notin A \Delta B$.
¿Has obtenido este resultado?

1.	$x \in A$	$x \in B$	:	$x \notin A \Delta B$
2.	$x \in A$	$x \notin B$	:	$x \in A \Delta B$
3.	$x \notin A$	$x \in B$	:	$x \in A \Delta B$
4.	$x \notin A$	$x \notin B$	:	$x \notin A \Delta B$

Se tiene, pues, $x \in A \Delta B$ solamente en estos casos:

2.	$x \in A$	y	$x \notin B$
3.	$x \notin A$	y	$x \in B$

Se tiene $x \notin A \Delta B$, solamente en estos casos:

1.	$x \in A$	y	$x \in B$
4.	$x \notin A$	y	$x \notin B$

Fíjate en qué casos se tiene $x \in (A \Delta B) \Delta C$.

Se tiene a $x \in (A \Delta B) \Delta C$ en los casos siguientes:

I.	$x \in A \Delta B$	y	$x \notin C$
II.	$x \notin A \Delta B$	y	$x \in C$

Hemos visto poco antes en qué casos se tienen las fórmulas

$$x \in A \Delta B \quad \text{y} \quad x \notin A \Delta B$$

Por tanto, $x \in (A \Delta B) \Delta C$ solo en los casos que siguen:

I.	$x \in A \Delta B$			y	$x \notin C$
a)	$x \in A$	y	$x \notin B$	y	$x \notin C$
b)	$x \notin A$	y	$x \in B$	y	$x \notin C$
II.	$x \notin A \Delta B$			y	$x \in C$
c)	$x \in A$	y	$x \in B$	y	$x \in C$
d)	$x \notin A$	y	$x \notin B$	y	$x \in C$

Finalmente, $x \in (A \Delta B) \Delta C$ solo en los casos

a) $x \in A$ y $x \notin B$ y $x \notin C$
b) $x \notin A$ y $x \in B$ y $x \notin C$
c) $x \notin A$ y $x \notin B$ y $x \in C$
d) $x \in A$ y $x \in B$ y $x \in C$

Se puede, pues, decir que $(A \Delta B) \Delta C$ es el conjunto de los objetos x para los cuales una o las tres fórmulas $x \in A$. $x \in B$, $x \in C$ son verdaderas.

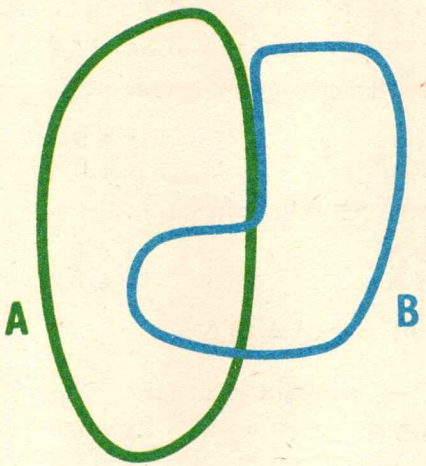
Caracteriza en forma análoga $C \Delta (A \Delta B)$.

Si $$C \Delta (A \Delta B) = (A \Delta B) \Delta C$$

se puede deducir $$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$$

La diferencia simétrica Δ es asociativa.

16. Traza un diagrama de la diferencia simétrica de los conjuntos A y B representados a continuación:



17. Si A es un conjunto cualquiera se tienen las fórmulas

$$A \Delta A = \phi \quad \text{y} \quad A \Delta \phi = A$$

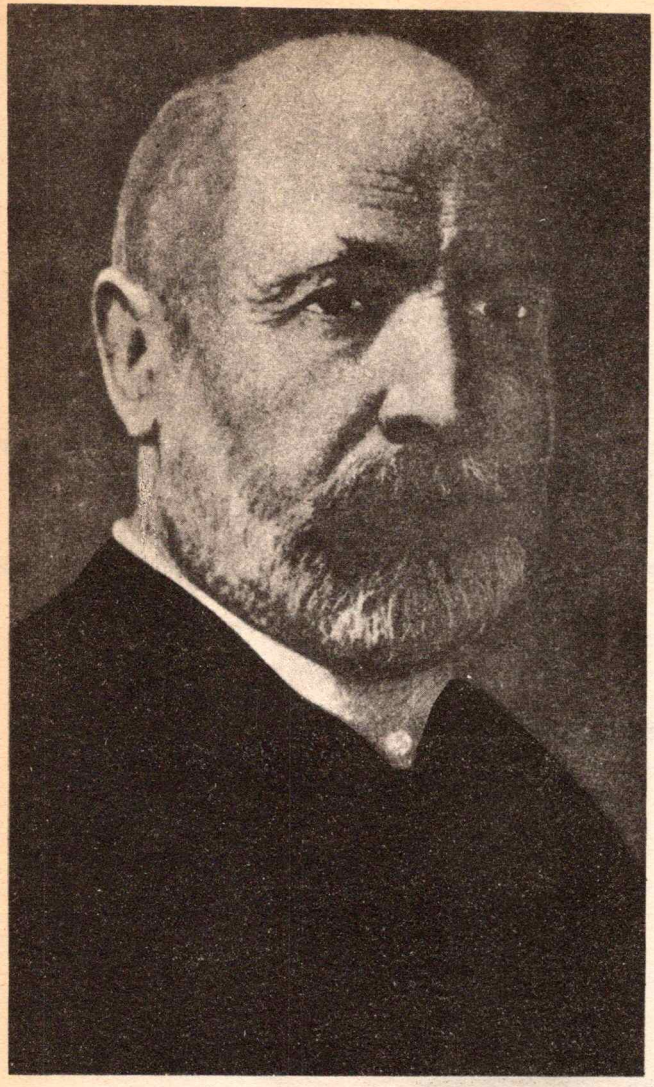
18. Si cada una de las letras A, B, C designa un conjunto se tiene

$$A \Delta B = C \iff A \Delta C = B \iff B \Delta C = A$$

19. Si cada una de las letras A, B designa un conjunto, existe un conjunto y uno solo X tal que

$$A \Delta X = B$$

Respuesta: $X = A \Delta B$)



CANTOR, Georg (1845-1918)

En el curso de la historia de la humanidad el hombre se ha ido liberando poco a poco de las condiciones físicas que parecían restringir su universo.

Tus bisabuelos siguieron las hazañas de los grandes exploradores.

Ya tus abuelos fueron testigos de los progresos del automóvil y los comienzos de la aviación.

Tus padres, de los progresos de la radio y los comienzos de la televisión.

Tú mismo has seguido las hazañas de los primeros cosmonautas.

Es el progreso de la ciencia y de la técnica lo que ha permitido al hombre ampliar su universo y alargar la duración de su vida.

Hoy todas las ciencias y las técnicas utilizan constantemente la matemática y están ligadas a sus progresos.

Si quieres participar con eficacia en la vida del mundo de mañana debes iniciarte en la ciencia y en las técnicas y, por consiguiente, en la matemática de hoy.

Deberás llegar a familiarizarte lo más rápidamente posible con las nociones fundamentales de la matemática moderna que es utilizada por todas las ciencias.

Por eso no podemos enseñarte más la matemática como les fue enseñada a tus padres o a tus bisabuelos.

Volveremos a encontrar, sin embargo, bajo otras luces, todos los resultados fundamentales que a ellos les fueron expuestos.

Esto resulta posible, en particular, gracias al genio de Georg Cantor, que fue uno de los primeros en destacar la importancia de la noción de **conjunto** en matemática.

Es habitual considerar el nacimiento de la teoría de los conjuntos como el comienzo de la matemática moderna.

Georg Cantor era hijo de un comerciante dinamarqués. Nació en Rusia en 1845 y pasó casi toda su vida en las universidades de Gotinga, Berlín y Halle.

Sus primeros estudios sobre la teoría de conjuntos datan de 1879.

Murió en 1918.

5

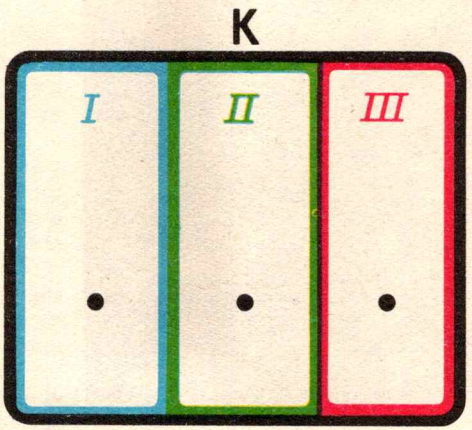
Particiones

Las alumnas de nuestra clase se reparten en tres filas.

Designemos por I el conjunto de las alumnas de la primera fila; por II el conjunto de las alumnas de la segunda fila; por III el conjunto de las alumnas de la tercera fila y por K el conjunto de las alumnas de nuestra clase.

Ninguno de los conjuntos I, II, III es vacío y toda alumna de nuestra clase pertenece a uno, y solo uno, de los conjuntos I, II, III; todo esto se expresa diciendo que **el conjunto de conjuntos** $\{I, II, III\}$ es una **partición** de K.

Tenemos, pues, el esquema



Describamos la situación precedente por fórmulas.

Ninguno de los conjuntos I, II, III es vacío:

$$I \neq \phi \quad , \quad II \neq \phi \quad , \quad III \neq \phi \qquad (1)$$

Ninguna alumna pertenece a dos de los conjuntos I, II, III. Esto se expresa también diciendo que estos conjuntos son disjuntos de a dos:

$$I \cap II = I \cap III = II \cap III = \phi \qquad (2)$$

Toda alumna de nuestra clase pertenece a uno de los conjuntos I, II, III.

$$I \cup II \cup III = K \qquad (3)$$

Recapitulemos:

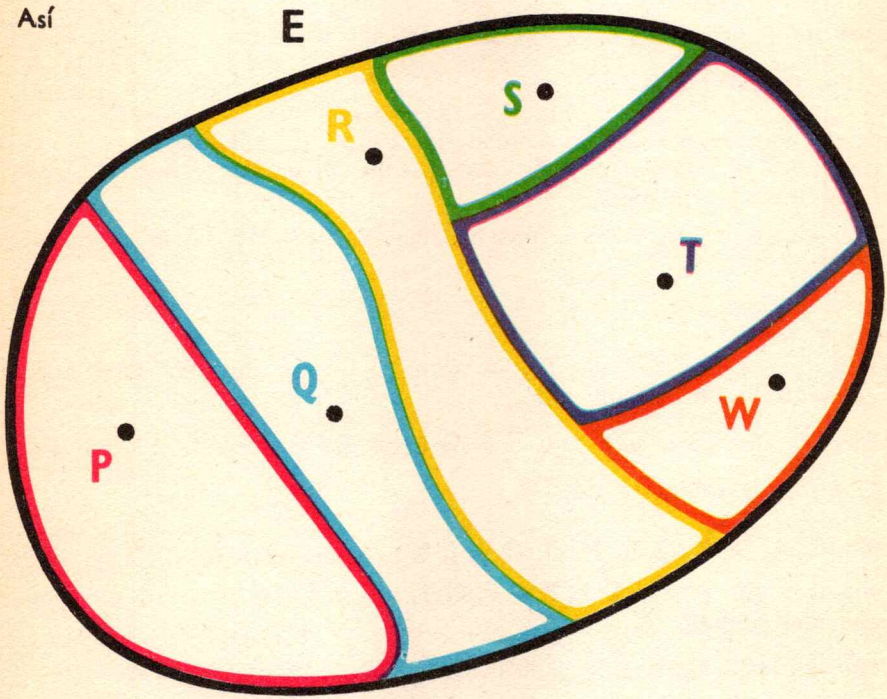
$$\{I, II, III\} \text{ es una } \textbf{partición} \text{ de } K \iff \begin{cases} I \neq \phi,\ II \neq \phi,\ III \neq \phi & (1) \\ I \cap II = I \cap III = II \cap III = \phi & (2) \\ K = I \cup II \cup III & (3) \end{cases}$$

DEFINICIÓN — ***Un conjunto $\mathcal{P}$ de partes no vacías de E es una partición del conjunto E ssi todo elemento de E pertenece a un conjunto y solo uno de $\mathcal{P}$.***

Los conjuntos elementos de $\mathcal{P}$ se llaman *clases* de la partición.
Se puede dar una definición equivalente.

DEFINICIÓN — ***Se llama partición de E todo conjunto $\mathcal{P}$ de partes no vacías de E, disjuntas dos a dos y cuya unión es igual a E.***

Así



$\{P, Q, R, S, T, W\}$ ES UNA PARTICIÓN DE **E**.

EJERCICIOS

1. Sea P el conjunto de los habitantes de la Argentina y A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, X, Y los conjuntos de los habitantes de la ciudad de Buenos Aires, de cada una de las 22 provincias argentinas y del territorio nacional de Tierra del Fuego.

{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, X, Y} es una partición de P.

2. Si ω = conjunto de los números naturales = {0, 1, 2, ...}

P = conjunto de los números naturales pares = {0, 2, 4, ...}

I = conjunto de los números naturales impares = {1, 3, 5, ...}

Entonces {P, I} es una partición de ω.

3. Sea R el conjunto de los alumnos de la clase de Rogelio, sea A el conjunto de los alumnos de esta clase que usan anteojos y V el conjunto de los que no usan anteojos.

Nos informan que {L, V} es una partición de R.

¿Qué conclusión sacas?

4. Sea M el conjunto de las alumnas de la clase de Yolanda, sean A el conjunto de las alumnas de esta clase que llevan medias y B el conjunto de las que no llevan medias.

Yolanda, que lleva medias, nos informa que {A, B} no es una partición de M.

¿Conclusión?

5. Recordemos que 2ω designa el conjunto de los múltiplos de 2 y 3ω el conjunto de los múltiplos de 3.

El conjunto $\{2\omega, 3\omega\}$ ¿es una partición de ω?

Justificar la respuesta.

6. Si {A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K} es una partición del conjunto X, entonces {A, B ∪ C, D ∪ E ∪ F, G, H ∪ I ∪ J ∪ K} es una nueva partición del conjunto X.

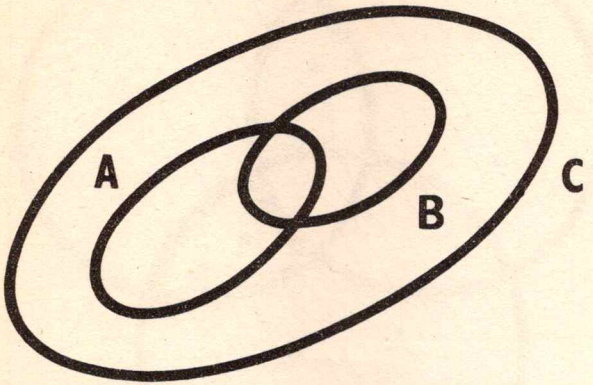
Haz un esquema poniendo en evidencia estas dos particiones.

7. Nos indican que {E} es una partición de E.

¿Qué conclusión se saca respecto de E?

8. Lleva al esquema que sigue la información

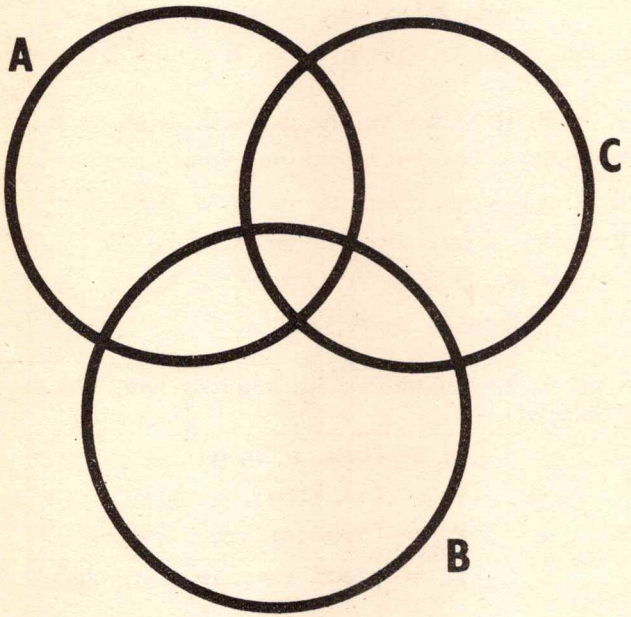
{A, B} es una partición de C.



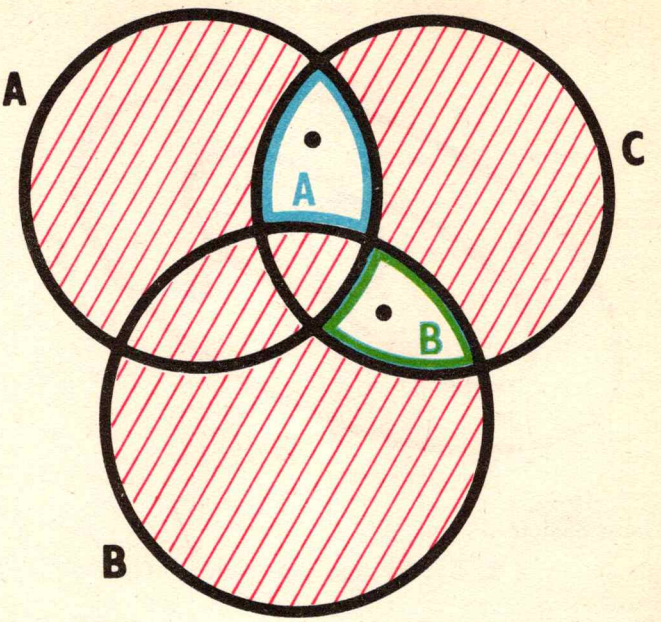
9. Lleva la información

{A, B} es una partición de C

al esquema que sigue:



Solución:



$\{A, B\}$ ES UNA PARTICIÓN DE C..

10. ¿Qué conclusión sacamos respecto de A, B si nos dan la información siguiente:

$\{A \cap B, A \setminus B, B \setminus A\}$ es una partición de $A \cup B$.

La misma pregunta si nos dan las informaciones:

$\{A \cap B, B \setminus A\}$ es una partición de $A \cup B$;

$\{A \setminus B, B \setminus A\}$ es una partición de $A \cup B$;

$\{A \cap B\}$ es una partición de $A \cup B$;

$\{A \setminus B\}$ es una partición de $A \cup B$.

11. Designemos por P_n el conjunto de los números naturales de **n** cifras (en numeración decimal).

Luego

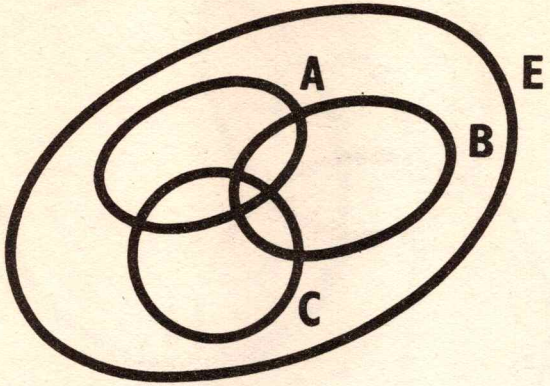
$$P_1 = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$$
$$P_2 = \{10, 11, 12, \ldots, 99\}$$
$$P_3 = \{100, 101, 102, \ldots, 999\}$$
$$P_4 = \{1000, 1001, 1002, \ldots, 9999\} \quad \text{etc...}$$

Muestra que $\{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$ es una partición de ω.

12. Lleva la información

$\{A, B, C\}$ en una partición de E

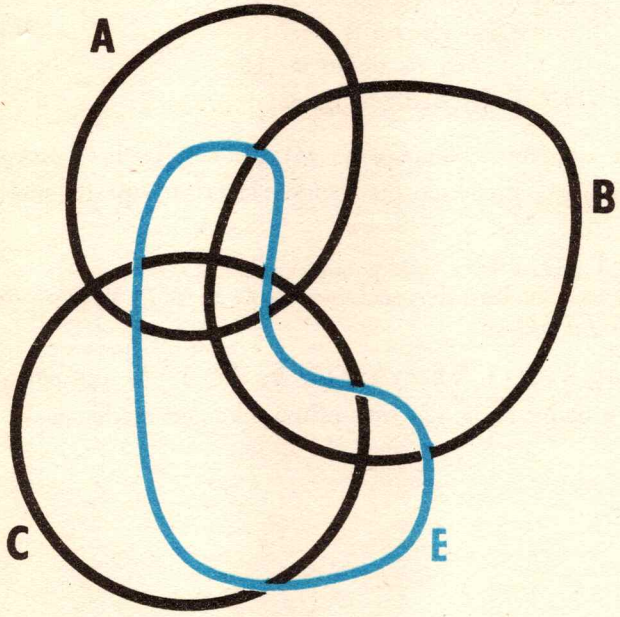
al esquema siguiente:



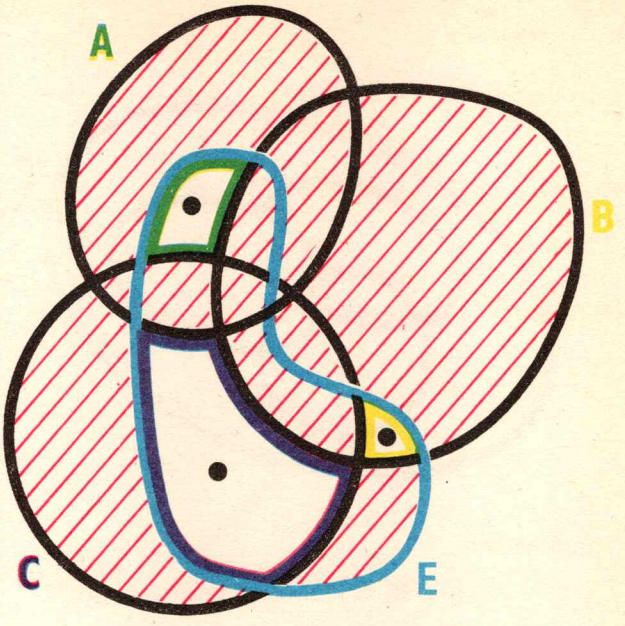
13. Lleva la información

$\{A, B, C\}$ en una partición de E

al esquema que sigue:



Solución:



14. **Si** $\{A, B, C, D\}$ es una partición de X,
$\{A_1, A_2\}$ una partición de A,
$\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ una partición de C,
y $\{D_1, D_2, D_3\}$ una partición de D,

entonces, $A_1, A_2, B, C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_2, D_3\}$ es una partición de X.
Haz un esquema poniendo en evidencia estas 5 particiones.

15. **Si** $\{A, B, C, D, E\}$ es una partición de X
y si cada una de las intersecciones $A \cap Y, B \cap Y, C \cap Y, D \cap Y, E \cap Y$ es no vacía,

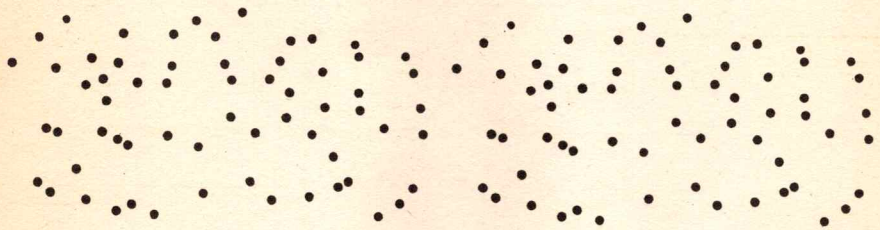
entonces, $\{A \cap Y, B \cap Y, C \cap Y, D \cap Y, E \cap Y\}$ es una partición de $X \cap Y$.
Haz un esquema poniendo esta proposición en evidencia.

6

Primeros elementos de Geometría

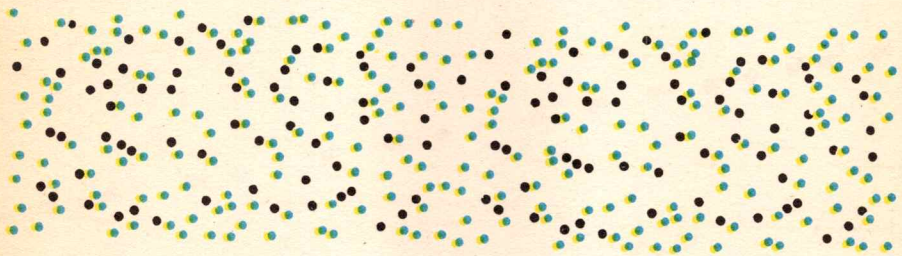
1 — CONJUNTOS DE PUNTOS

— Dibuja puntos en el pizarrón



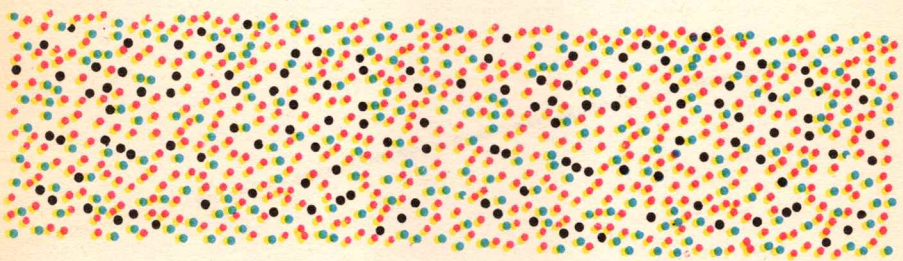
— ¿Puedes dibujar más?

— Marco nuevos puntos en verde.

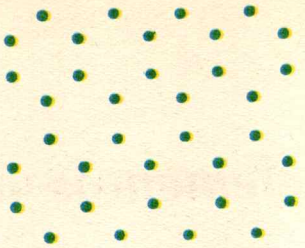


— ¿Puedes todavía dibujar más?

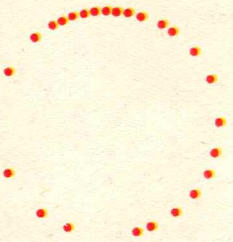
— Los marcaré en anaranjado.



— Dibuja un lindo conjunto de puntos en el pizarrón.



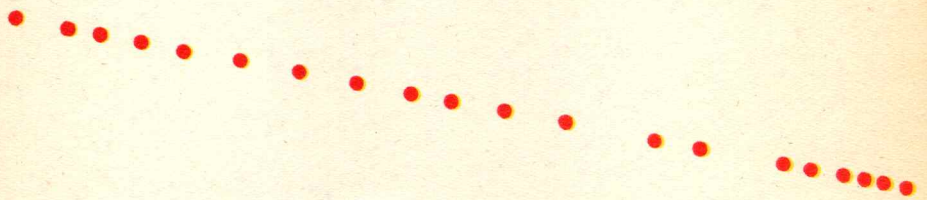
— Dibuja un conjunto de puntos pertenecientes a una circunferencia.



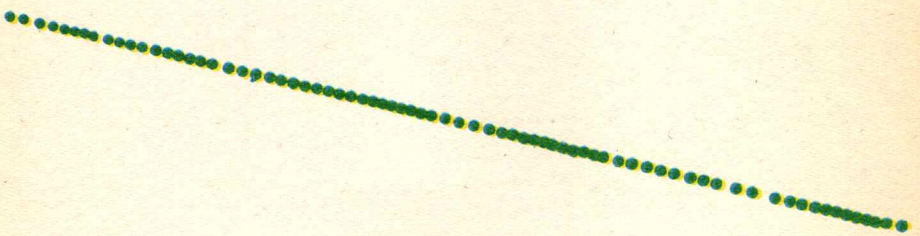
— ¿Has dibujado todos los puntos de la circunferencia?

— . . .

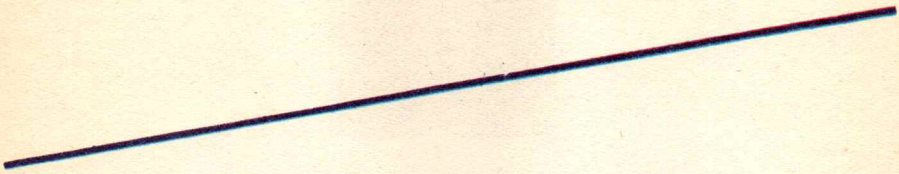
— Dibuja puntos que estén **alineados** (o en línea recta).



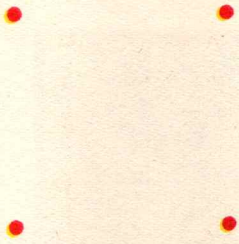
— Dibuja un conjunto de puntos alineados más próximos.



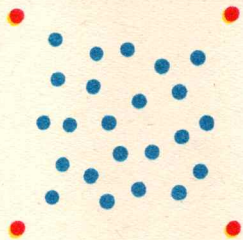
— ¿Podrías dibujar nuevos puntos de esta *recta*?
— . . .
— Dibuja *todos* los puntos de una *recta*.



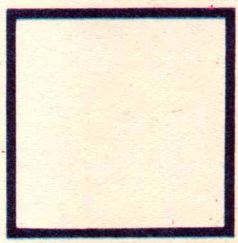
— ¿Has dibujado realmente todos los puntos de la recta?
— La recta es ilimitada en los dos sentidos; solo podemos dibujar una parte.
— Dibuja los vértices de un cuadrado.



— Dibuja puntos **interiores** a este cuadrado.

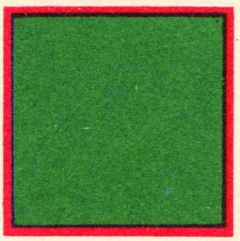


— ¿Puedes dibujar otros puntos **interiores** al cuadrado?
— . . .
— Dibuja todos los puntos que pertenecen al **borde** del cuadrado.

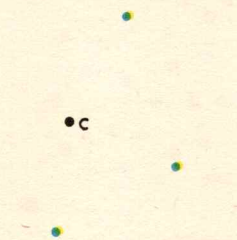


— Dibuja el conjunto de los puntos del **borde** del cuadrado o **interiores** al cuadrado.

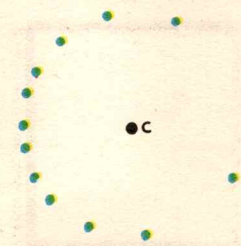
— Querría que ahora dibujaras el conjunto de los puntos **interiores** al cuadrado. (Los puntos del borde *no* pertenecen, pues, a este conjunto.)
— ¿Cómo indicar que los puntos del borde no pertenecen al conjunto?
— Vamos a hacer una **convención**. Para indicar que los puntos del borde no pertenecen al conjunto, dibujaremos en verde los puntos interiores del cuadrado y en rojo los puntos del borde.



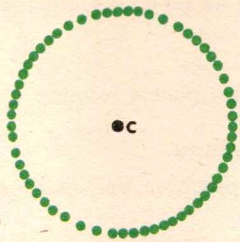
— Dibuja un punto c y dibuja 3 puntos a 1,5 cm de c..



— Dibuja 12 puntos a 1,5 cm de c.



— Dibuja muchos puntos situados a 1,5 cm de c.

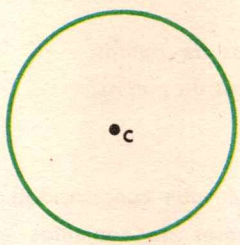


— ¿Existen más puntos situados a 1,5 cm de c?

— . . .

— Dibuja el conjunto de todos los puntos situados a 1,5 cm de c.

— Es la **circunferencia de centro c y de radio 1,5 cm.**



— Traza una circunferencia c de centro o y de radio 3 cm.

¿Quieres dibujar tres puntos situados a 2 cm de o?

Dibuja un punto a 2,5 cm de o.

Otro punto a 2,9 cm de o.

¿Resulta fácil dibujarlo?

— Estos puntos se encuentran cada vez más cerca de la circunferencia c.

El grosor de las marcas de tinta o de lápiz por las que *representamos* los puntos quita claridad al dibujo.

Habríamos podido representar los puntos por marcas más finas.

— Es verdad.

Dibuja, pues, con más precisión, con trazos muy finos; que los puntos sean muy pequeñas marcas. Traza una circunferencia de centro a y de 7 cm de radio.

Dibuja un punto *b* situado a 6 cm de *a*.

Dibuja entre *b* y la circunferencia un punto *d* situado a 6,9 cm de *a*.

Dibuja entre *d* y la circunferencia un punto *f* situado a 6,99 cm de *a*.

¿Te resulta fácil?

— No, las marcas que representan los puntos resultan otra vez demasiado gruesas.

— Todo dibujo es un esquema imperfecto.

A lo sumo podemos mejorar la precisión del dibujo por trazos más finos, marcas más finas.

Al final, va a resultar imposible representar correctamente todos los puntos.

Entre el centro y la circunferencia existen puntos situados a 6 cm, a 6,9 cm, a 6,99 cm, a 6,999 cm, a 6,999 999 cm del centro.

Cualquiera que sea la precisión del dibujo, se van a tocar algunas marcas representativas de puntos distintos. *Los puntos, ellos, no se tocan.*

Entre dos puntos distintos, existe siempre una infinidad de otros puntos.

Existen puntos tan cerca de la circunferencia como quieras.

No existe un último punto antes de la circunferencia.

¡No olvides jamás esto!

— *Las circunferencias son conjuntos de puntos.*

¿Hemos encontrado otros conjuntos de puntos?

— Las rectas, los cuadrados . . .

— Cuando hablas de cuadrado ¿se sabe con claridad de qué hablas?

¿No hemos encontrado tres clases de conjuntos que habríamos podido llamar **cuadrados?**

CUADRADO CERRADO

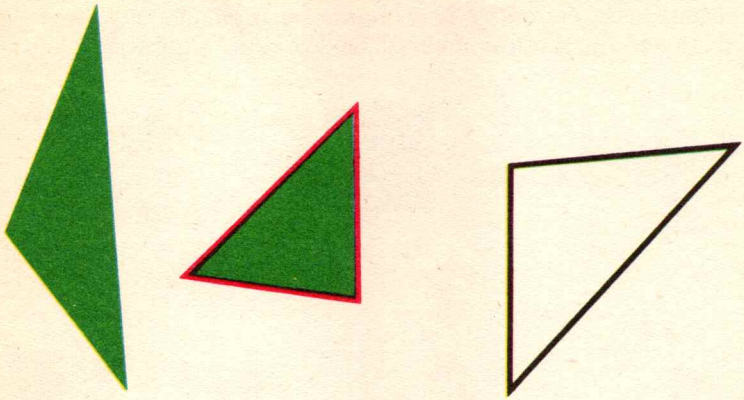
CUADRADO ABIERTO

BORDE DEL CUADRADO

Para ser perfectamente claros, llamaremos **cuadrado cerrado** al conjunto de los puntos que pertenecen al borde del cuadrado o son interiores al borde.

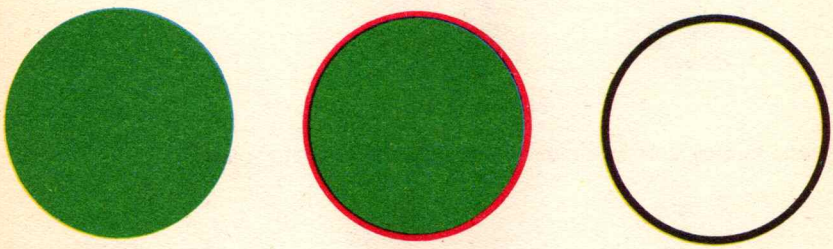
Llamaremos **cuadrado abierto** al conjunto de los puntos interiores al borde del cuadrado.

¿Quieres hacer convenciones análogas con los triángulos?



TRIÁNGULO CERRADO — TRIÁNGULO ABIERTO — BORDE DEL TRIÁNGULO

— Adoptaremos convenciones análogas respecto de la *circunferencia*



CÍRCULO CERRADO — CÍRCULO ABIERTO — CIRCUNFERENCIA

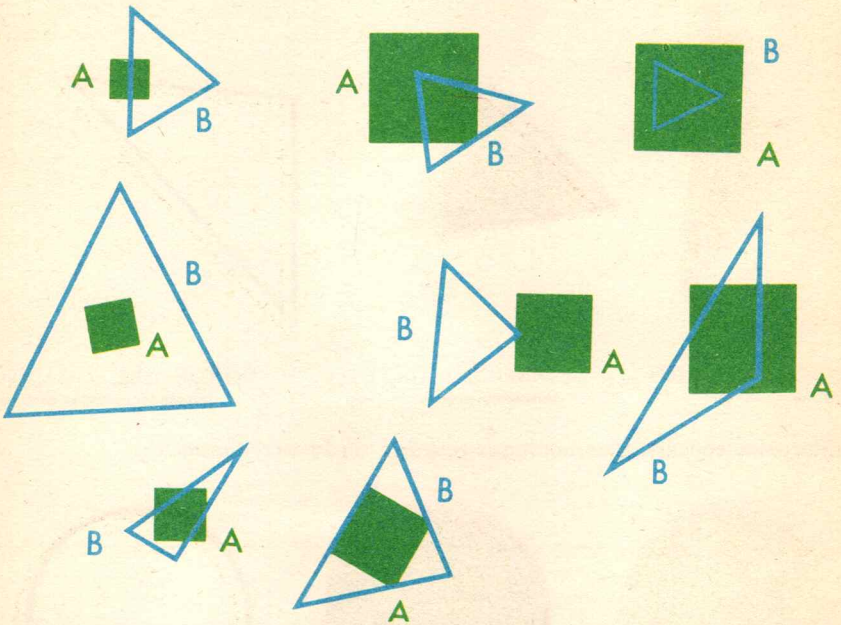
La *circunferencia* es, pues, un borde de *círculo*.

— ¿Podrías dibujar un rectángulo ni abierto ni cerrado?

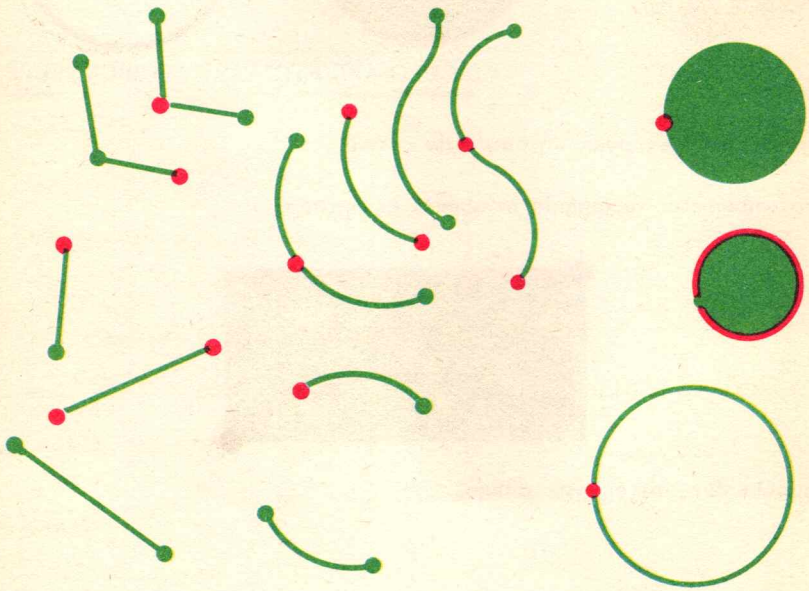
Di todo lo que ves en este dibujo.

EJERCICIOS

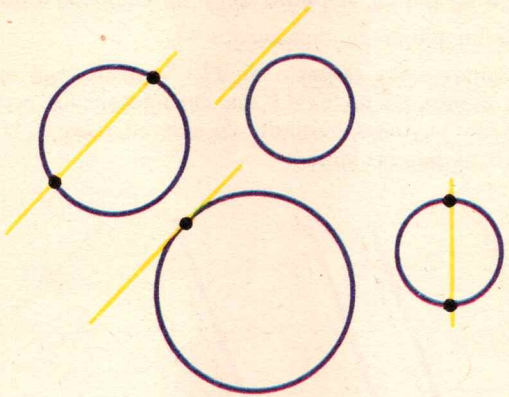
1. A es un cuadrado cerrado y B un borde de triángulo. ¿Quieres determinar $A \cap B$? ¿Quieres mostrar muchos de los casos posibles?



2. Explica cuáles son los conjuntos representados a continuación.

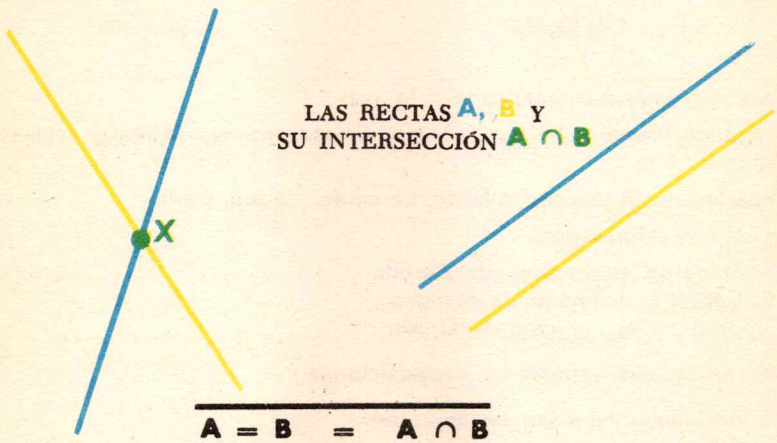


3. Un círculo abierto y su circunferencia forman una **partición** de un círculo cerrado.
4. Una circunferencia de radio nulo es un **conjunto unitario.**
5. ¿Qué conjunto es $A \cap B$ si A es una circunferencia y B una recta? Verás que esta intersección es un par o bien un conjunto unitario o bien el conjunto vacío.



A B $A \cap B$

6. Si A y B son rectas, ¿qué puede ser la intersección $A \cap B$?
Si $A = B$, se tiene $A \cap B = A = B$.
Si $A \neq B$, la intersección $A \cap B$ es un conjunto unitario o bien el conjunto vacío.



$A = B = A \cap B$

7. Si A, B y C designan rectas, ¿qué representan los conjuntos siguientes?

$A \setminus B$
$A \cup B$
$(A \cup B) \cap C$

Considera todos los casos de figura.

2 — PLANO Y AXIOMAS

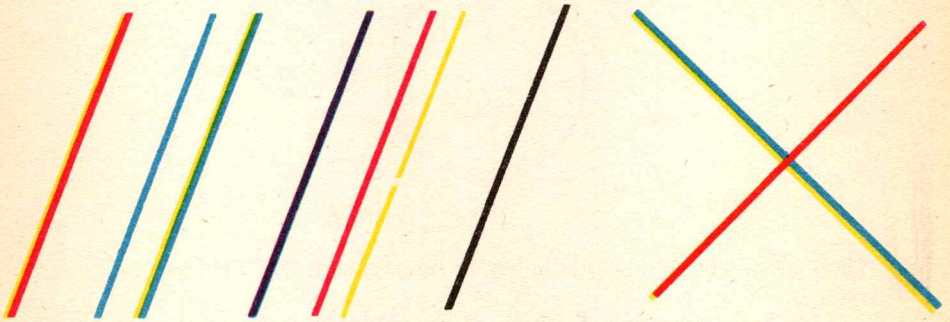
El conjunto de todos los puntos del pizarrón y de todos aquellos que se obtienen prolongando las partes de rectas del pizarrón se llama **plano del pizarrón.**

Lo mismo podríamos haber hablado de plano del piso, de plano del techo, de plano del cuaderno.

Lo que diremos de un plano se podrá decir de cualquier otro plano.

Vamos a estudiar un plano; lo llamaremos Π.

Sabemos ya bastantes cosas respecto de Π. Sabemos qué es la distancia de 2 puntos. Sabemos que ciertas partes de Π son circunferencias, rectas. Sabemos también, aunque todavía no hayamos hablado de eso en nuestro libro, que las rectas pueden ser paralelas o perpendiculares.



RECTAS PARALELAS

$A \parallel B$, $C \parallel D$, etc.

RECTAS PERPENDICULARES

X Y

Pero no vamos a retener todo a la vez.

Pongamos orden en lo que sabemos de manera que debamos retener lo menos posible.

Consideremos 4 jóvenes: Alfredo, Bernardo, Cecilia, Dora.

Te dan la información:

1. Bernardo es hermano de Alfredo.
2. Cecilia es hermana de Bernardo.
3. Dora no es hermana de Cecilia.

De ella puedes **deducir** las **proposiciones**:

4. Alfredo es hermano de Bernardo.
5. Alfredo es hermano de Cecilia.
6. Alfredo no es hermano de Dora.
7. Bernardo es hermano de Cecilia.
8. Bernardo no es hermano de Dora.
9. Cecilia es hermana de Alfredo.

10. Cecilia no es hermana de Dora.
11. Dora no es hermana de Alfredo.
12. Dora no es hermana de Bernardo.

Acabamos de enunciar 12 **proposiciones**. Sabes todo lo que ellas dicen con solo retener las proposiciones 1, 2, 3.

— ¿Tal vez preferirías elegir otras proposiciones para que fueran retenidas?

¿Qué proposiciones podrías retener para conservar la misma información?

— Las proposiciones 7, 9 y 12.

— Busca otras maneras de procurarnos la misma información.

— ...

— Ves que se puede obtener la misma información enunciando proposiciones diferentes.

"1 y 2 y 3" da la misma información que "7 y 9 y 12".

En geometría la situación es más complicada que en el ejemplo que acabamos de dar.

Comprenderás que se tenga entonces mucha más libertad en la elección de las proposiciones iniciales que deberán retenerse. Los geómetras han trabajado durante milenios para encontrar *conjuntos de proposiciones iniciales* que resultaran *cómodas*. Esperamos que nuestra elección ha de facilitar tu estudio.

Se llaman **axiomas** las proposiciones iniciales que deben ser retenidas.

Nuestro primer axioma será muy simple.

AXIOMA Π 1 — ***El plano*** Π ***es un conjunto infinito de puntos.***

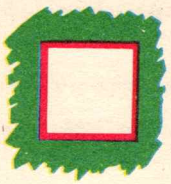
Cuando decimos que el plano es un conjunto infinito de puntos, ¿qué queremos decir?

Existe $p_1 \in \Pi$.
Existe $p_2 \in \Pi \setminus \{p_1\}$.
Existe $p_3 \in \Pi \setminus \{p_1, p_2\}$.
Existe $p_4 \in \Pi \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$.
...
Existe $p_{84} \in \Pi \setminus \{p_1, p_2, \ldots, p_{83}\}$.
...

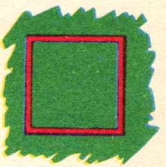
EJERCICIOS

1. Sea A un cuadrado abierto, B un cuadrado cerrado y C un borde de cuadrado. Representa usando verde y rojo $\Pi \setminus A$, $\Pi \setminus B$, $\Pi \setminus C$.

$\Pi \setminus A$

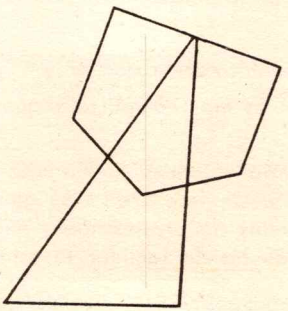


$\Pi \setminus B$



$\Pi \setminus C$

2. El dibujo siguiente representa un borde de triángulo y un borde de polígono.

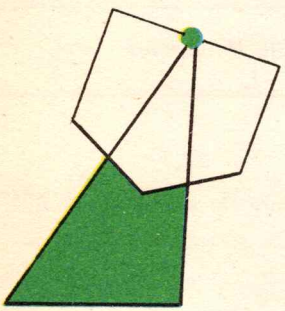


Sea P el polígono abierto y T el triángulo cerrado definidos por estos bordes. ¿Quieres representar (en verde y rojo)

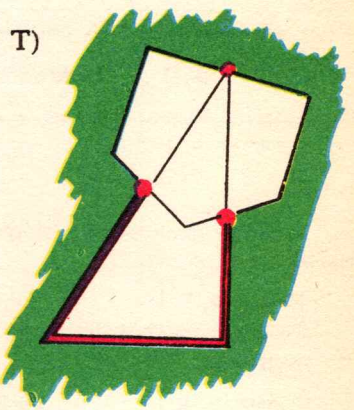
$(\Pi \setminus P) \cap T$

$(\Pi \setminus P) \cap (\Pi \setminus T)$

$(\Pi \setminus T) \cap P$



$(\Pi \setminus P) \cap T$



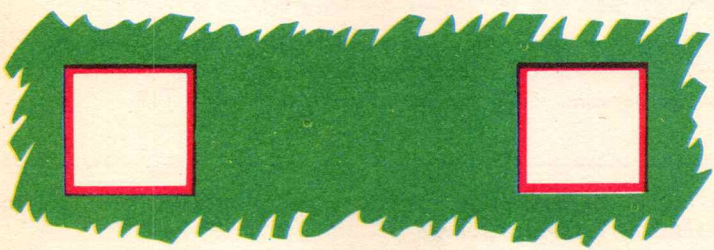
$(\Pi \setminus P) \cap (\Pi \setminus T)$

3. Sean A y B cuadrados cerrados.

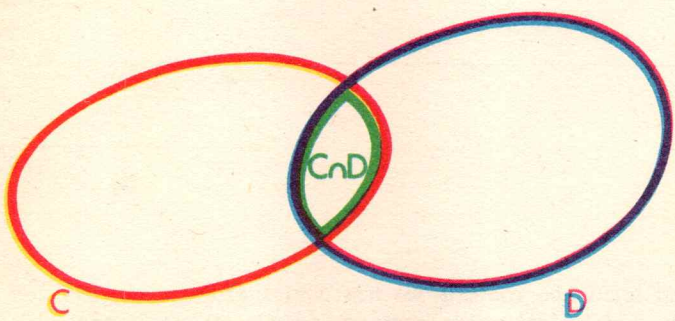
Convengamos que $C = \Pi \setminus A$, $D = \Pi \setminus B$
Verifica la fórmula:

$$C \cap D = \Pi \setminus (A \cup B)$$

Haz una figura y representa $C \cap D$ en verde y rojo.



Dibuja después los *diagramas* de los conjuntos C, D, $C \cap D$.

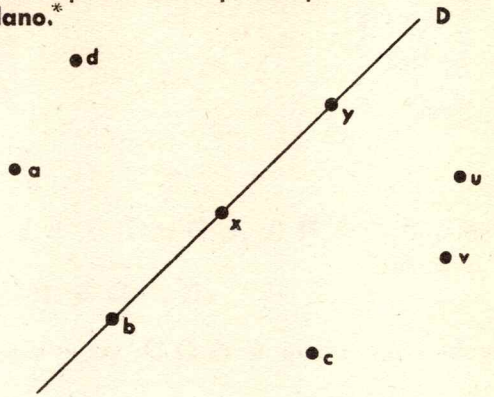


$C \cap D$

3 — RECTAS

Hemos visto que las rectas del plano Π son partes infinitas de Π.

Si D es una recta, existen puntos de Π que no pertenecen a D: **toda recta es una parte propia del plano.***



$a \notin D$, $b \in D$, $c \notin D$, $d \notin D$, $x \in D$, $y \in D$, $u \notin D$, $v \notin D$

Como las rectas son partes muy importantes del plano, conviene que designemos siempre con la misma letra $\mathfrak{D}$ el conjunto de las rectas de Π.

Reunamos las informaciones precedentes en el axioma Π2.

> AXIOMA Π2. — ***Las rectas son partes propias infinitas de*** Π. ***El conjunto de las rectas se designa por*** $\mathfrak{D}$.

— Dibuja tres puntos alineados y tres puntos no alineados.

Existe una recta que contiene los tres puntos azules.

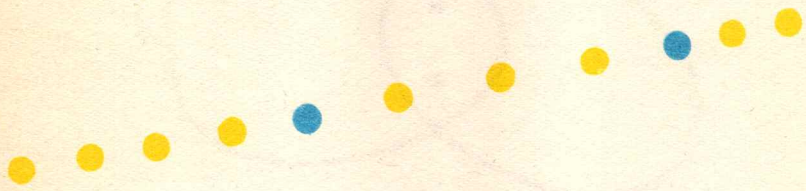
No existe ninguna recta que contenga los tres puntos verdes.

* D y *D* notación del original. En español, lo natural es llamar R a una recta y *R* el conjunto de las rectas de Π. *(N. del T.)*

Tres puntos no pertenecen siempre a la misma recta.

Dibuja otros puntos alineados con los puntos azules de la figura anterior.

Dibuja 2 puntos azules en el pizarrón. Con seguridad puedes dibujar puntos amarillos alineados con los dos azules.



Existe una, y solo una, recta que contiene estos puntos azules.

Esta información da lugar al axioma $\Pi 3$.

AXIOMA $\Pi 3$ — ***Todo par de puntos está incluido en una, y solo una, recta.***

Si te dicen que

$$x \in \Pi \quad , \quad y \in \Pi \quad , \quad x \neq y,$$

sabes, pues, que existe una, y solo una

$$D \in \mathfrak{D}$$

tal que

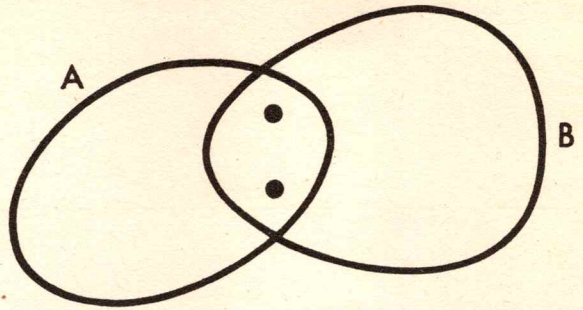
$$x \in D \quad , \quad y \in D$$

La recta D así definida por x e y será a menudo designada xy.

Así, : $x, y \in \Pi$ et $x \neq y \Rightarrow xy \in \mathfrak{D}$ et $x \in xy$, $y \in xy$.

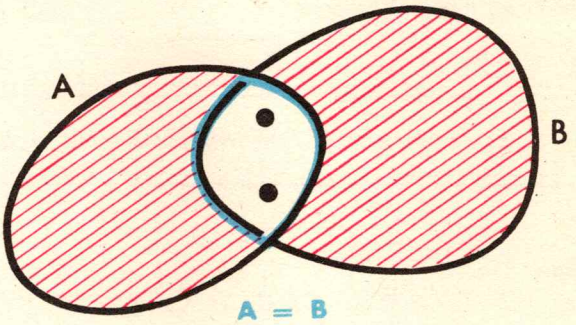
EJERCICIOS

1. He aquí un diagrama en el que A y B representan rectas.
¿Qué conclusión puedes sacar? Dibuja A y B en el plano del cuaderno.



Cada una de las rectas A, B contiene los *dos* puntos marcados. Por otra parte, existe una, y solo una, recta que contiene esos dos puntos.

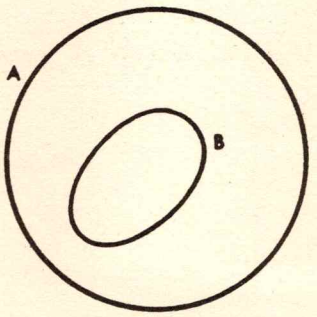
Entonces, A = B.



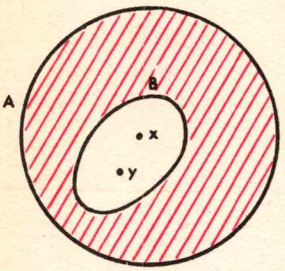
Explica

$A, B \in \mathfrak{D}; x, y \in \Pi; x \neq y; x \in A; x \in B; y \in A; y \in B \Rightarrow A = B$

2. El diagrama que sigue representa las rectas A y B.
Lleva informaciones suplementarias al diagrama. Dibuja A y B en el plano de tu cuaderno.



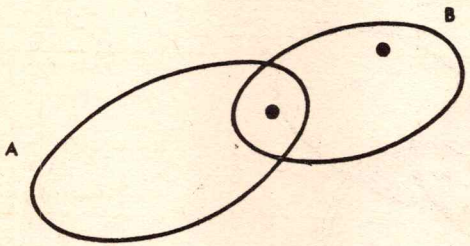
La recta B contiene, por lo menos, dos puntos diferentes $x \neq y$.
Los puntos x, y pertenecen a la recta A.
Pero no existe más que una recta que contenga x e y.
Entonces, A = B.



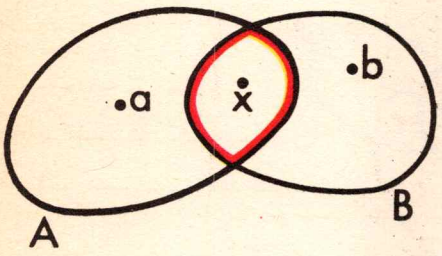
DIAGRAMA

EN EL PLANO Π

3. Iguales consideraciones para este diagrama, en el que A y B designan también rectas.

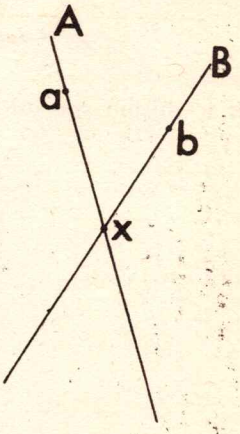


Existe un punto (llamémoslo b) que pertenece a B y no a A.
Luego, A ≠ B.
Por consiguiente, A ∩ B no puede contener más de un punto.



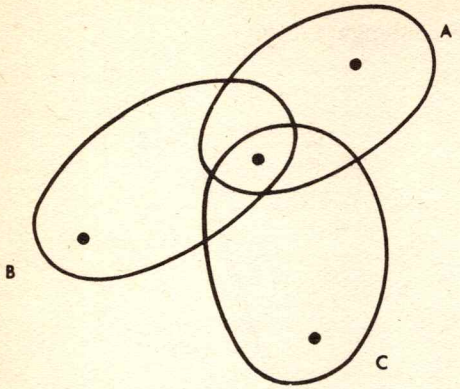
{x}

DIAGRAMA

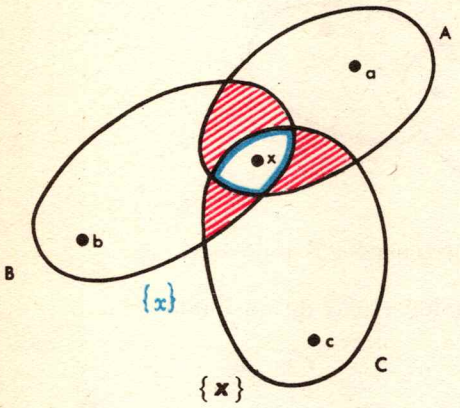


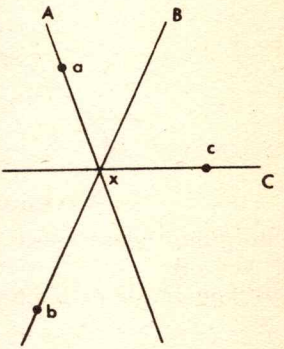
EN EL PLANO Π

4. En el diagrama siguiente se tiene A, B, C $\in \mathfrak{D}$.

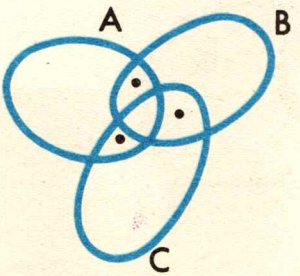


5. Lleva informaciones suplementarias al diagrama. Restituye la situación al plano del cuaderno.





Hacer lo mismo con este diagrama:



A, B, C $\in \mathfrak{D}$

6. Sean $a, b \in \Pi$ y $a \neq b$.

Designemos por $\mathfrak{D}_a$ el conjunto de las rectas que contienen a a.

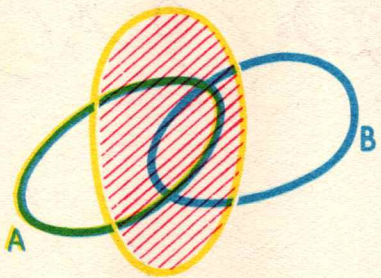
Luego, $\mathfrak{D}_a = \{D \in \mathfrak{D} \mid a \in D\}$

Del mismo modo, $\mathfrak{D}_b = \{D \in \mathfrak{D} \mid b \in D\}$

Justifica la fórmula

$$\mathfrak{D}_a \cap \mathfrak{D}_b = \{ab\}$$

7. Restituye al plano del cuaderno la situación descrita por el diagrama siguiente:



$\mathbf{A, B \in \mathfrak{D}}$

8. Se puede señalar por una fórmula que los puntos x, y, z, t están alineados:

$$x, y, z, t \in D \in \mathfrak{D}$$

9. Si $A, B \in \mathfrak{D}$ y $A \subset B$
entonces $A = B$

4 — PARALELISMO

Cada una de las letras A, B designa una recta.

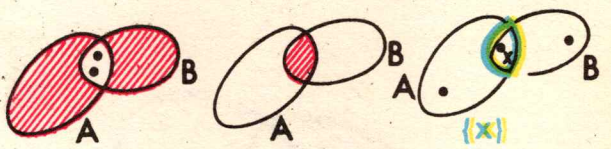
Examinemos qué puede ser $A \cap B$

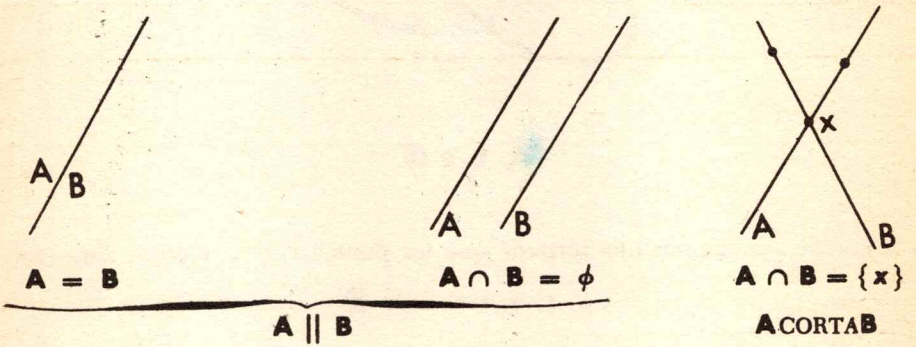
Si $A \cap B$ contiene (por lo menos) dos puntos, el axioma 3 nos dice que $A = B$.

— ¿Cuáles son las posibilidades restantes, cuando $A \neq B$?

Si $A \neq B$, la intersección $A \cap B$ es el conjunto vacío o un conjunto unitario.

Representemos estos diferentes casos por diagramas y en el plano del cuaderno.





Recapitulemos estos resultados:

PROPOSICIÓN 1. *La intersección de dos rectas* ***diferentes*** *es un conjunto unitario o el conjunto vacío.*

DEFINICIÓN 1. — *Dos rectas se llaman* ***secantes ssi*** *su intersección es un conjunto unitario.*
Dos rectas no secantes se llaman ***paralelas.***

Si $A, B \in \mathfrak{D}$

$$A \text{ y } B \text{ secantes} \iff A \text{ y } B \text{ no paralelas}$$

Se indica que A y B son paralelas por la notación $A \| B$.
Se indica que A y B son secantes escribiendo $A \# B$.
No debes perder de vista que si $A, B \in \mathfrak{D}$

$$A \| B \iff (A = B \text{ ó } A \cap B = \phi)$$

EJERCICIOS

1. Sean $A, B \in \mathfrak{D}$.

   Se tiene $A \parallel A,\ B \parallel B$

   y

   $$A \parallel B \iff B \parallel A$$

2. Sean $A, B \in \mathfrak{D}$; $A \neq B$; $A \parallel B$.

   ¿Quieres dibujar en verde y rojo:

   $$\Pi \setminus (A \cup B) \text{ et } \Pi \setminus (A \cap B)$$

3. Si $A, B \in \mathfrak{D}$, se tiene

   $$A \text{ corta a } B \iff B \text{ corta a } A$$

4. Sean A y B dos rectas secantes.

   Describe

   $(\Pi \setminus A) \cap (\Pi \setminus B)$,
   $(\Pi \setminus A) \cup (\Pi \setminus B)$,
   $A \cup (\Pi \setminus B)$,
   $A \cap (\Pi \setminus B)$,
   $\Pi \setminus (A \cup B)$,
   $\Pi \setminus (A \cap B)$,
   $A \setminus B,\ A \cup B$

   ¿Cuáles de estos términos designan el mismo conjunto? ¿Puedes probarlo por el cálculo?

5 — DIRECCIONES

— Dibuja una recta D del plano Π.
Traza una paralela A a D.
¿Puedes trazar una nueva paralela a D? Llamémosla B.
¿Puedes trazar muchas otras?
¿Puedes trazar todas las paralelas?

— No puedo trazar todas porque hay una infinidad de paralelas a D.

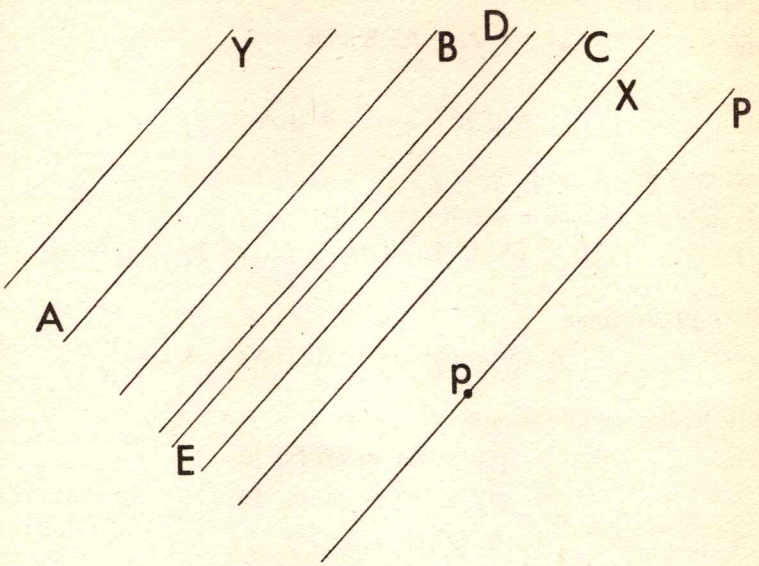
— Marca un punto p en el pizarrón.
¿Existe una paralela a D que contenga a p?

— ¡Sí!

— ¿Cuántas paralelas a D que contengan a p existen?

— Una sola.

Llamaremos **dirección de D** al conjunto de las paralelas a D. Vamos a designar este conjunto por *dir* D.



ALGUNOS ELEMENTOS DE *dir* **D**

DEFINICIÓN 2 — *Se llama* ***dirección de una recta*** *al conjunto de las paralelas a dicha recta.*

Una dirección es un conjunto de rectas, es decir, de partes *no vacías* de Π, y todo punto de Π pertenece a una, y solo una, de estas rectas.

Toda dirección es, pues, una partición del plano Π.

Esta importante información constituirá nuestro axioma Π4.

AXIOMA Π4 — ***Toda dirección es una partición del plano.***

EUCLIDES

— ¿Que puedes decir de 2 elementos distintos X e Y de dir D?

— Que son rectas disjuntas y, por consiguiente, paralelas.

PROPOSICIÓN 2 — *Todas las rectas de una dirección son paralelas entre sí.*

— Cada una de las letras A, B, C designa una recta de Π.
Nos informan que $A \parallel B$ y $B \parallel C$.
¿Qué conclusión sacas?

— A y C pertenecen a *dir* B y son, pues, paralelas.

PROPOSICIÓN 3 — **Si** *cada una de las rectas A, C es paralela a la recta B,* **entonces** *las rectas A y C son paralelas.*

En otros términos:

PROPOSICIÓN 3 — Para todo A, B, $C \in \mathfrak{D}$:

$$A \parallel B \parallel C \quad \Rightarrow \quad A \parallel C$$

PROPOSICIÓN 4 — **Si** *dos rectas son paralelas,*
entonces *toda recta que corta a una de ellas corta a la otra.*

Dicho de otro modo:

PROPOSICIÓN 4 — Para todo A, B, $C \in \mathfrak{D}$

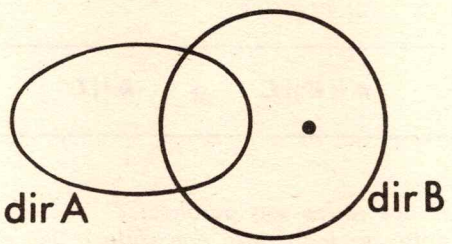
$$A \parallel B \nparallel C \quad \Rightarrow \quad A \nparallel C$$

DEMOSTRACIÓN:

Cada una de las letras A, B, C designa una recta de Π.
Nos dan las informaciones $A \parallel B$ y B C.
¿Es posible que se tenga además $A \parallel C$?
Las fórmulas $A \parallel B$ y $A \parallel C$ traerían como consecuencia $B \parallel C$.
Pero nos han advertido que $B \nparallel C$.
No podemos, pues, tener $A \parallel C$.

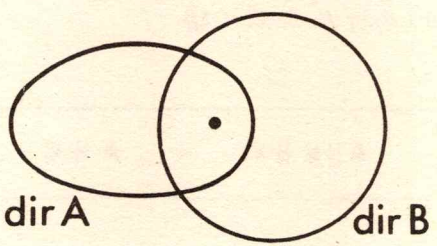
EJERCICIOS

1. $A \parallel B \iff B \parallel A.$
2. $A \parallel B \iff A \in dir\ B.$
3. $A \in dir\ B \iff B \in dir\ A.$
4. Si $A \parallel B$, toda paralela a A es paralela a B y toda paralela a B es paralela a A. Luego, $A \parallel B \iff dir\ A = dir\ B.$
5. **Si** $A \nparallel B$, **entonces** $dir\ A \cap dir\ B = \phi.$
6. $dir\ A = \{D \in \mathfrak{D} \mid D \parallel A\}.$
7. Lleva informaciones complementarias a este diagrama:

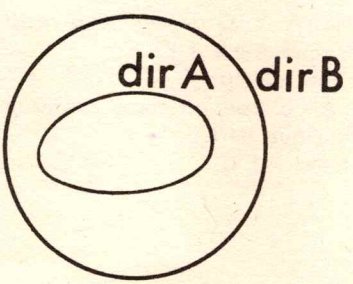


Dibuja las rectas A y B en el plano del cuaderno.

8. El mismo ejercicio a partir de la situación siguiente.



9. El mismo ejercicio.



10. Para toda recta D se tiene

$$dir\ D \subset \mathfrak{D}.$$

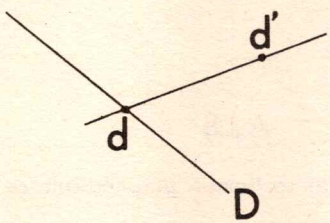
11. Si $A, B \in \mathfrak{D}$, se da una, y solo una, de las posibilidades

$$dir\ A = dir\ B \qquad o \qquad dir\ A \cap dir\ B = \phi$$

12. Toda recta pertenece a una, y solo una, dirección.

13. El conjunto de las direcciones es una partición de $\mathfrak{D}$.

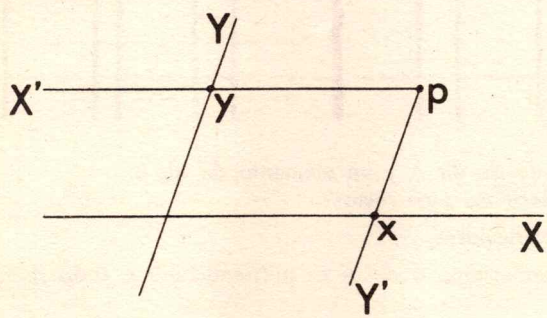
14. Sea $D \in \mathfrak{D}$. Existe una recta D' no paralela a D.
En efecto, sea $d \in D$ y $d' \notin D$. La recta dd' corta a D.



$d\,d' \nparallel D$

15. Sean $X, Y \in \mathfrak{D}$ y $X \nparallel Y$.
Sea $p \in \Pi$.
Llamemos X' a la paralela a X que contiene a p. Luego, $p \in X' \parallel X$.
Sea Y' la recta definida por $p \in Y' \parallel Y$.

$X' \parallel X \nparallel Y$. Luego, $X' \nparallel Y$. Sea $X' \cap Y = \{y\}$
$Y' \parallel Y \nparallel X$. Luego, $Y' \nparallel X$. Sea $Y' \cap X = \{x\}$



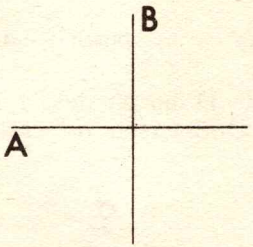
6 — PERPENDICULARIDAD

Doblemos una hoja de papel en dos.

Así doblada, volvamos a doblarla aplicando la raya del primer doblez sobre sí misma.

Abramos después la hoja.

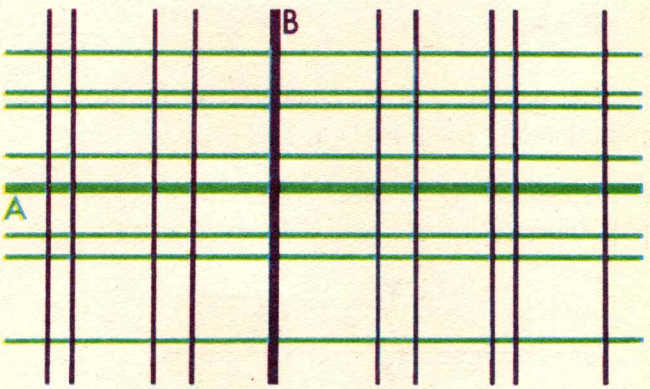
Los dobleces hacen aparecer el dibujo que sigue:



$A \perp B$

Las rectas A y B así dibujadas se llaman perpendiculares y se escribe, entonces, $A \perp B$ (o $B \perp A$).

Dibuja un gran número de rectas pertenecientes a *dir* A y un gran número de rectas pertenecientes a *dir* B.



— Elige un elemento de *dir* A y un elemento de *dir* B.
¿Qué puedes decir de esas rectas?

— Que son perpendiculares.

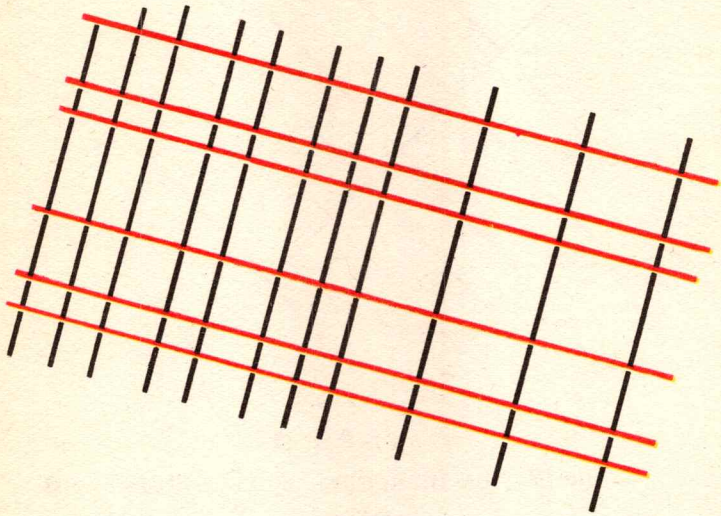
— Toda recta perteneciente a *dir* A es perpendicular a toda recta perteneciente a B.

Diremos que **estas direcciones son perpendiculares.**

— Traza en negro varias rectas de una dirección.
¿Existe alguna dirección perpendicular a esa dirección?

— Sí.

— Traza en anaranjado varias rectas de tal dirección.



DIRECCIONES PERPENDICULARES

— ¿Una de las rectas anaranjadas puede ser paralela a una de las rectas negras?

— No, toda recta anaranjada corta a toda recta negra.

— ¿Cuántas direcciones existen perpendiculares a una dirección?

— Una sola.
Reunamos estas informaciones en el axioma Π5.

· AXIOMA Π5 — ***A toda dirección a corresponde una, y solo una, dirección a' perpendicular a a. Se señala este hecho escribiendo $a \perp a'$ (o escribiendo $a' \perp a$).***

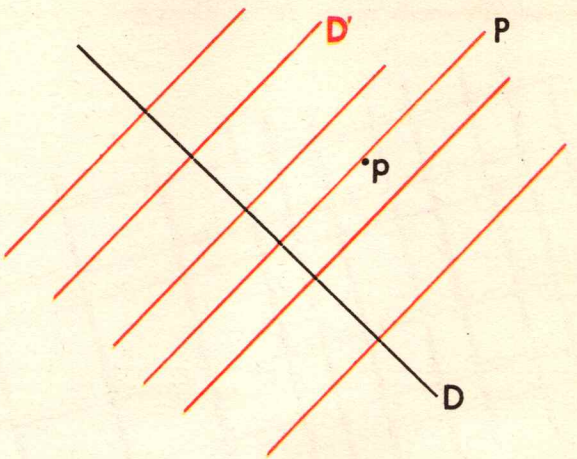
Toda recta $A \in a$ es perpendicular a toda recta $A' \in a'$. Se señala este hecho escribiendo $A \perp A'$ (o $A' \perp A$).

Dos rectas perpendiculares son secantes.

— Te doy una recta D.

— ¿Cuál es el conjunto de las rectas perpendiculares a D?

— Es la dirección *dir* D' perpendicular a *dir* D.



$p \in P \perp D$

***dir* D'** : LA DIRECCIÓN PERPENDICULAR A **D**

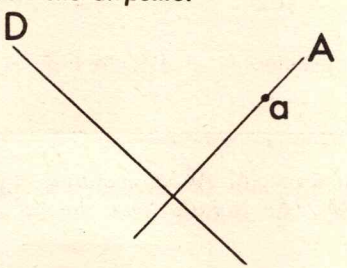
Por otra parte, sabemos que *dir* D' es una partición del plano.
Luego todo punto de Π pertenece a una, y solo una, recta de *dir* D'.
Hemos probado que

PROPOSICIÓN 5 — *Para todo* $p \in \Pi$ *y* $D \in \mathfrak{D}$ *existe una, y solo una, recta* P, *tal que*

$$p \in P \perp D$$

Dicho de otro modo:

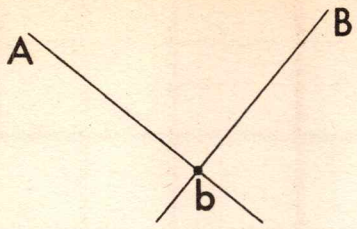
PROPOSICIÓN 5 — *Dados una recta y un punto, existe una, y solo una, perpendicular a la recta que contiene al punto.*



Te dan la recta D y el punto *a*.

Existe una, y solo una, perpendicular a D que contiene a *a*.

Es la recta A: $a \in A \perp D$.



Te dan $A \in \mathfrak{D}$ y $b \in A$.

Existe una, y solo una, perpendicular a A que contiene al punto *b*.

Es la recta B: $b \in B \perp A$.

— ¿Cuándo decimos que $A \perp B$?

— Cuando *dir* $A \perp$ *dir* B.

Y en consecuencia, toda recta de *dir* A (es decir, toda paralela a A) es perpendicular a toda recta de *dir* B (es decir, a toda paralela a B).

Enunciamos este resultado en la

PROPOSICIÓN **6** — Para todo $A', A, B, B' \in \mathfrak{D}$:

$$A' \parallel A \perp B \parallel B' \Rightarrow A' \perp B'$$

que se expresa sin símbolos:

PROPOSICIÓN **6** — **Si** *dos rectas son pararelas a rectas perpendiculares,*
entonces *esas dos rectas son perpendiculares.*

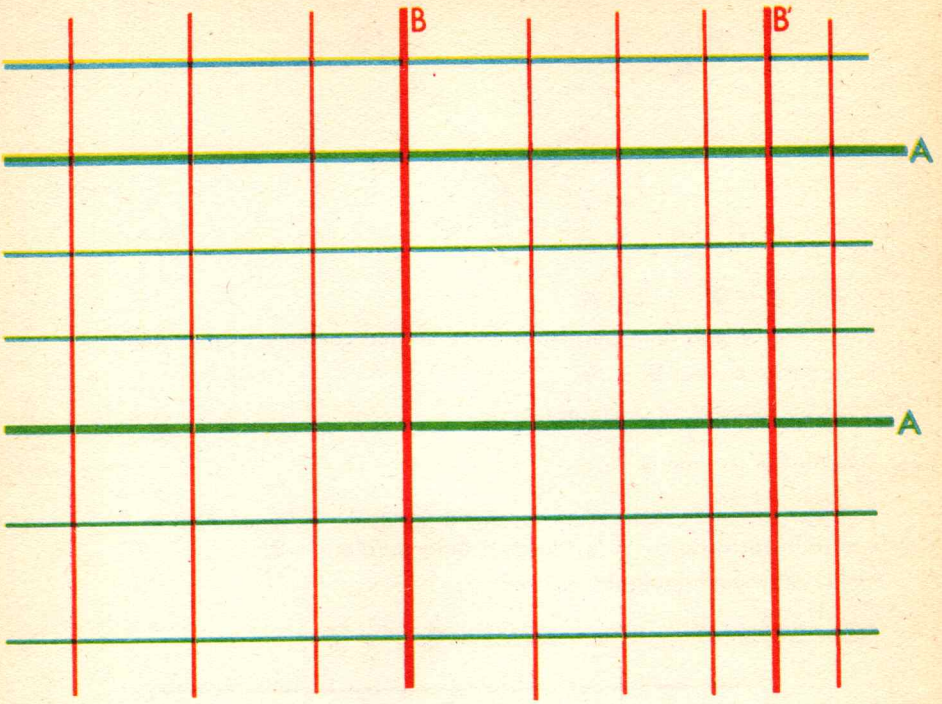
Como $A \parallel A$ y $B \parallel B$ se tiene en particular:

PROPOSICIÓN **7** — Para todo $A', A, B, B' \in \mathfrak{D}$:

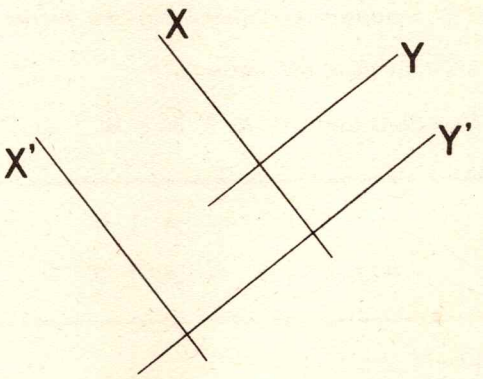
$$A \perp B \parallel B' \Rightarrow A \perp B'$$
$$A' \parallel A \perp B \Rightarrow A' \perp B$$

que se enuncia también:

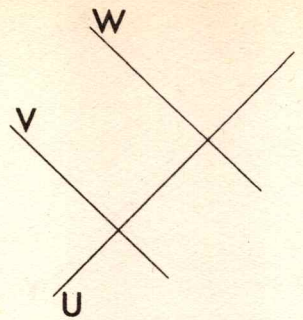
PROPOSICIÓN **7** — **Si** *dos rectas son paralelas,*
entonces *toda perpendicular a una de ellas es perpendicular a la otra.*



$$A' \parallel A \perp B \parallel B' \Rightarrow A' \perp B'$$
$$A \perp B \parallel B' \Rightarrow A \perp B'$$



$$X' \parallel X \perp Y \parallel Y' \Rightarrow X' \perp Y'$$



$$U \perp V \parallel W \Rightarrow U \perp W$$

Te doy dos rectas, A y B, las dos perpendiculares a C.
Luego,

$$A \perp C \quad y \quad B \perp C$$

¿Qué sabes de las direcciones de A, B, C?

$$dir\ A \perp dir\ C \quad y \quad dir\ B \perp dir\ C.$$

¿Cuántas direcciones perpendiculares a *dir* C existen?

Una sola.

Luego,

$$dir\ A = dir\ B.$$

¿Qué significa esto para A y B?

$$A \parallel B.$$

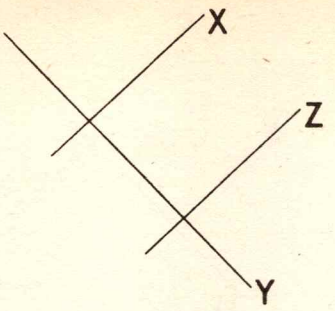
Hemos probado, pues, que:

PROPOSICIÓN 8 — *Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas.*

Dicho de otro modo:

PROPOSICIÓN 8 — *Para todo* X, Y, Z $\in \mathfrak{D}$

$$X \perp Y \perp Z \Rightarrow X \parallel Z$$



$$X \perp Y \perp Z \Rightarrow X \parallel Z$$

Reunamos algunos resultados concernientes a las paralelas y las perpendiculares.

$$\begin{array}{l} A \parallel B \parallel C \Rightarrow A \parallel C \\ A \parallel B \perp C \Rightarrow A \perp C \\ A \perp B \parallel C \Rightarrow A \perp C \\ A \perp B \perp C \Rightarrow A \parallel C \end{array}$$

— Enuncia las proposiciones correspondientes a estas fórmulas. Búscalas en el libro.

— ...

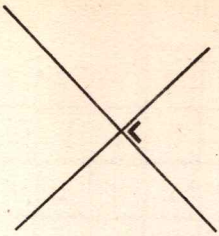
— Si las rectas X, Y, Z, T son tales que

$$X \perp Y \perp Z \perp T$$

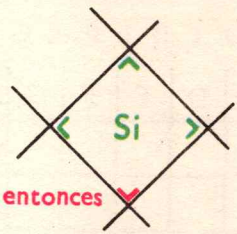
¿qué puedes decir de X y T?

$$X \perp Y \perp Z \Rightarrow X \parallel Z$$
$$X \parallel Z \perp T \Rightarrow X \perp T$$

Queda justificada, pues, la fórmula $X \perp Y \perp Z \perp T \Rightarrow X \perp T$



— Se indica a menudo que dos rectas A y B son perpendiculares dibujando una pequeña escuadra, como en la figura anterior.



$$X \perp Y \perp Z \perp T \Rightarrow X \perp T$$

EJERCICIOS

1. Llevamos la información $X \perp Y \perp Z \perp T$ al cuadro

	X	Y	Z	T	
X		⊥			
Y			⊥		
Z				⊥	
T					

¿Quieres completar este cuadro? Explica y justifica cada signo que coloques.

	X	Y	Z	T	
X	$\parallel$	$\perp$	$\parallel$	$\perp$	
Y	$\perp$	$\parallel$	$\perp$	$\parallel$	
Z	$\parallel$	$\perp$	$\parallel$	$\perp$	
T	$\perp$	$\parallel$	$\perp$	$\parallel$	

2. Hacer lo mismo partiendo de la información:

A $\perp$ B $\parallel$ C $\parallel$ D $\perp$ E $\perp$ F $\perp$ G $\parallel$ H $\parallel$ K $\perp$ L

	A	B	C	D	E	F	G	H	K	L	
A	$\parallel$	$\perp$									
B			$\parallel$								
C				$\parallel$							
D					$\perp$						
E						$\perp$					
F							$\perp$				
G								$\parallel$			
H									$\parallel$		
K										$\perp$	
L											

3. Te doy una cadena de rectas separadas por los signos $\perp$ y $\parallel$.

M $\parallel$ P $\perp$ Q $\parallel$ R $\parallel$ S $\perp$ T $\perp$ U $\perp$ V $\parallel$ W $\perp$ X $\perp$ Y $\parallel$ Z

Se tiene con seguridad M $\parallel$ Z o M $\perp$ Z.
¿Puedes determinar cuál de estas dos eventualidades se da, contando el número de los signos $\perp$ que figuran en la cadena?
Enuncia la regla y justifícala.

EUCLIDES
(alrededor de 300 años antes de J.C.)

Si la ciencia y la técnica progresan hoy a un ritmo más rápido que en cualquier período de la historia de la humanidad, no debemos enorgullecernos y suponer que este ritmo se debe a una inteligencia mayor propia del hombre de hoy.

En otros tiempos, solo en algunos pocos lugares desparramados por el mundo había gente consagrada al progreso de la ciencia. Y, en ellos, además, tenían únicamente acceso a la ciencia ciertos privilegiados.

Hoy, la enseñanza se va democratizando más y más y va alcanzando poco a poco todas las regiones de nuestro planeta.

Los sabios se encuentran de este modo reclutados dentro de una masa cada vez más grande, y se los pone inmediatamente al corriente de los descubrimientos de sus colegas gracias a nuestros rápidos medios de comunicación.

Pero los tan espectaculares progresos a los que asistimos hoy no se deben exclusivamente a los contemporáneos. Estos han recibido en herencia los resultados adquiridos por sus predecesores.

El **axioma de Euclides**, que acabamos de enunciar, se encuentra ya, bajo una forma diferente, en los *Elementos* que Euclides escribió en Alejandría más de 300 años antes de J. C.

Alejandría, con su inestimable biblioteca, era, en esa época, uno de los raros hogares de la cultura.

No se sabe casi nada de la vida de Euclides, ni la fecha de su nacimiento, ni la de su muerte, ni siquiera su nacionalidad.

Su obra fundamental, los *Elementos*, recopila y organiza la matemática básica de su época. En ella encontramos integrados en forma admirable los resultados debidos a matemáticos anteriores, como Tales de Mileto (alrededor de 600 años antes de J. C), Pitágoras de Samos (alrededor de 500 años antes de J. C.), Eudoxio de Cnido (alrededor de 400 años antes de J. C.).

Los *Elementos* de Euclides han alcanzado un enorme éxito y de ellos se ha podido decir que constituyen el segundo *best seller* mundial (después de la Biblia).

De los *Elementos* se han hecho más de mil ediciones impresas y numerosas ediciones manuscritas.

Ciertos pasajes de los libros de geometría que usaron tus padres reproducen casi literalmente el texto de Euclides.

7

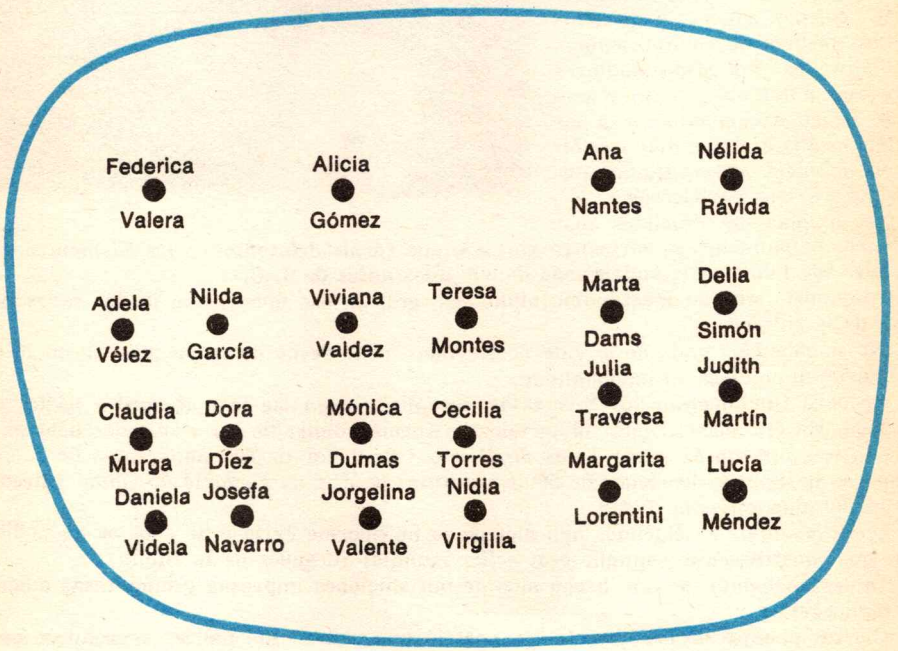
Relaciones

1 – EL JUEGO "NOMBRE/APELLIDO"

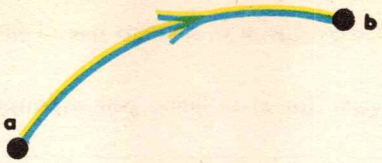
Se ha pedido a cada alumna de nuestra clase que señale a toda alumna de nuestra clase cuyo apellido comience por la misma letra que el nombre de ella.

Así, Marta Dams señalará a Teresa Montes.
Marta Dams señalará a Judith Martin.
Marta Dams señalará a Claudia Murga.
Dora Díez señalará a Mónica Dumas.
Dora Díez señalará a Marta Dams.
Dora Díez señalará a Dora Díez.

En lugar de completar esta letanía describamos esta situación en un dibujo. Representemos a cada alumna de nuestra clase por un punto.



Cada vez que una alumna *a* tenga que señalar a una alumna *b*, traza una flecha que vaya de *a* a *b*.



Ciertas alumnas como Dora Díez deben señalarse a sí mismas. En este último caso, la flecha resulta superflua: basta dibujar un lazo, como ves abajo.

Resultará cómodo llamar a este lazo *"flecha que va de c a c"*.

Di por qué en el caso de puntos *a* y *b* diferentes nos hemos visto obligados a poner una flecha.

Ponte a trabajar: obtendrás finalmente el **gráfico** que aquí vemos.

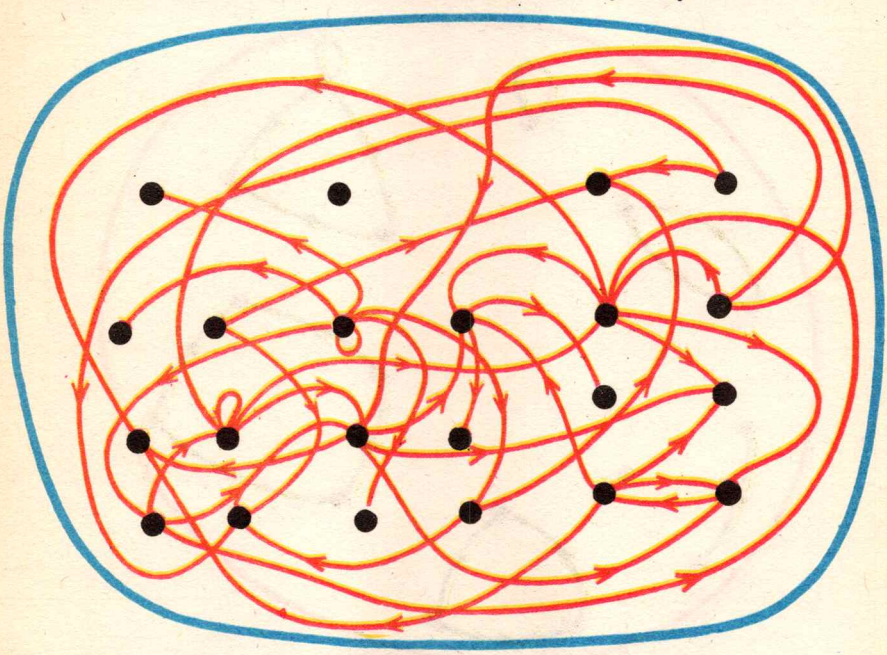


GRÁFICO 1

Este gráfico representa una **relación** en el conjunto de las alumnas de nuestra clase.

Si una flecha parte de *a* y llega a *b*, diremos que el **par ordenado** (*a*, *b*) es un elemento de la relación.

Un par ordenado tal como (*a*, *a*) se llama **par ordenado idéntico.**

DEFINICIÓN — ***Se llama relación todo conjunto de pares ordenados.***

Como basta con indicar una sola vez que el par ordenado (*a*, *b*) pertenece a la relación, *no se dibujará nunca más de una flecha de a a b (en un mismo gráfico).*

EJERCICIOS

1. El mismo juego ha sido propuesto en otras clases. En una de ellas hemos obtenido el curioso gráfico que mostramos a continuación. Imagina para esos alumnos nombres *compatibles* con el gráfico.

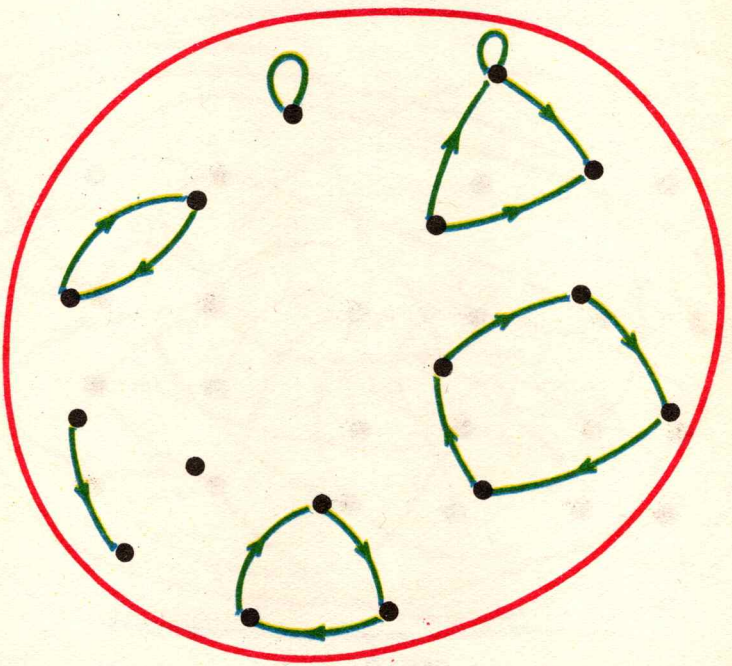


GRÁFICO 2

2. Algunos niños han jugado a nuestro juego. Entregan el gráfico siguiente a un profesor que no los conoce.

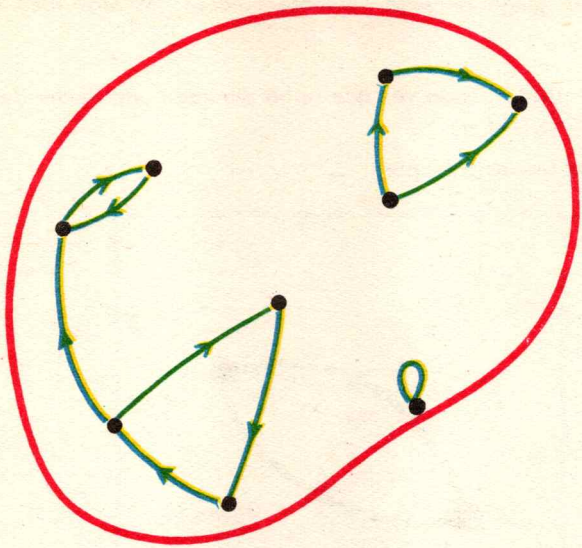


GRÁFICO 3

Después de un examen de menos de medio segundo, el profesor ha declarado: "Este gráfico es falso". Y, sin embargo, ignora el nombre de los alumnos. ¿Cómo te lo explicas?

3. El timbre del recreo ha interrumpido el trazado del gráfico de la misma relación en una de nuestras clases. Aquí tenemos un fragmento de ese gráfico inconcluso.

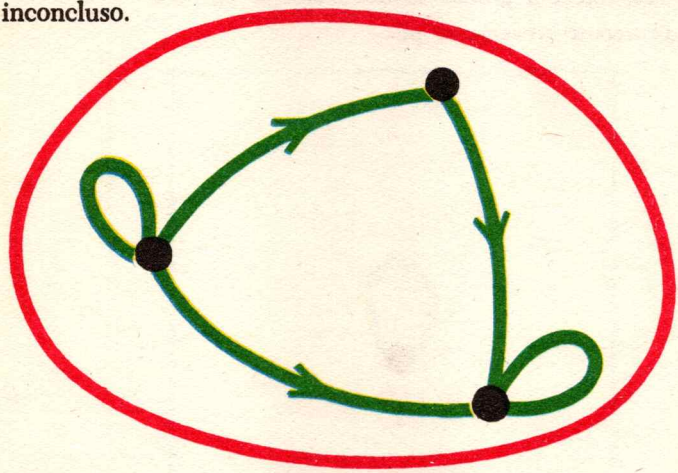


GRÁFICO 4

Aunque no conoces el nombre de los alumnos estás lo mismo en condiciones de completar este fragmento. Justifica cada trazado nuevo.

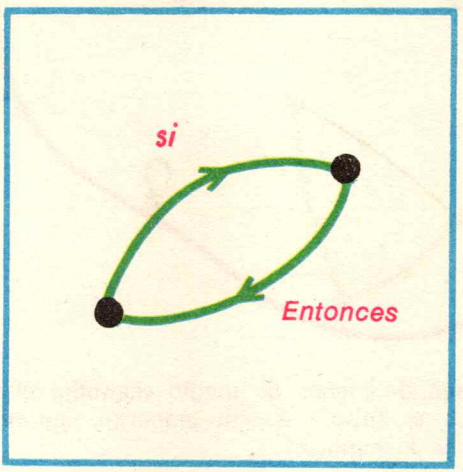
2 — EL JUEGO "NOMBRE/NOMBRE"

— ¡El gráfico del juego análogo "nombre/nombre" es más fácil de hacer!

— ¿Por qué?

— En este nuevo gráfico, cada vez que se ha dibujado una flecha de *a* a *b*, se debe dibujar una flecha de *b* a *a*.

Esto lo indicaremos brevemente por

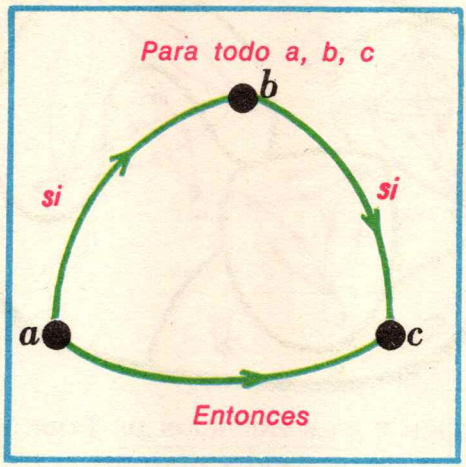


— En todo punto del gráfico se debe dibujar un lazo.

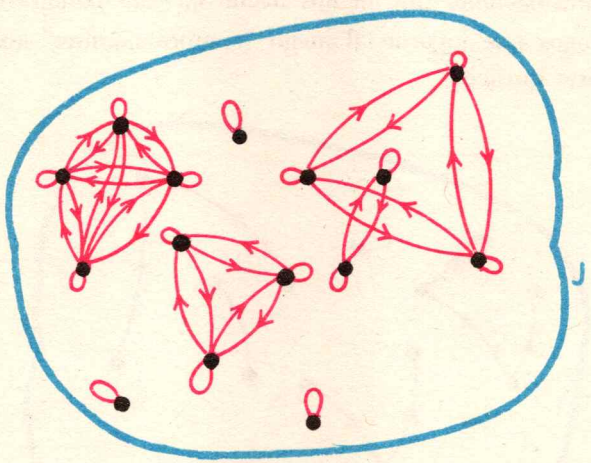
Esto lo indicaremos brevemente por

— En el nuevo gráfico, si una flecha va de *a* a *b* y una flecha de *b* a *c*, se debe trazar una flecha de *a* a *c*.

Esto lo expresaremos brevemente por



— Dibujemos un gráfico que pueda describir la relación P que define el juego "nombre/nombre" en un conjunto J de jugadores.

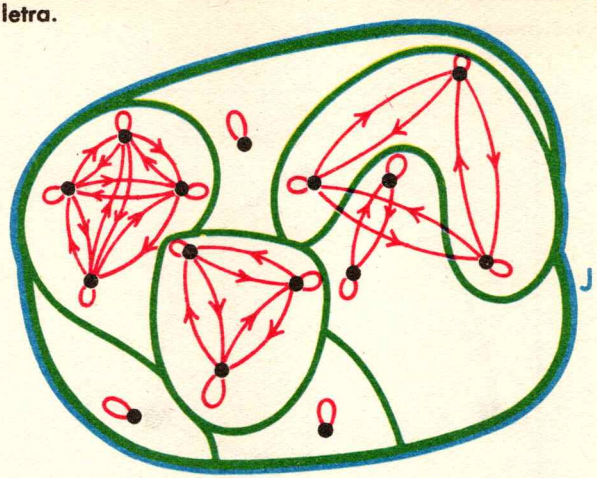


LA RELACIÓN **P** :

...tiene un nombre que comienza por la misma letra que el nombre de...

GRÁFICO 5

Este gráfico hace aparecer una partición del conjunto J de los jugadores. Cada una de las clases de la partición contiene a todos los jugadores cuyo nombre comienza por una misma letra.



LA RELACIÓN P Y LA PARTICIÓN DE J QUE ELLA DEFINE

GRÁFICO 6

EJERCICIOS

1. Justifica las afirmaciones que hemos hecho en este parágrafo.
2. Algunos alumnos que jugaron al juego "nombre/nombre" abandonaron en el pizarrón este gráfico.

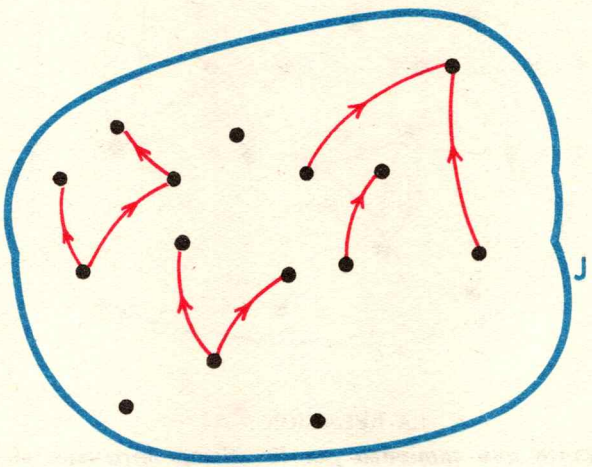


GRÁFICO 7

¿Qué flechas (y lazos) debían, *con seguridad*, haber agregado?

3. Designemos por A el conjunto de los alumnos de tu clase cuyo *nombre* comienza por *a*. Se define del mismo modo B, C, Ch, D, E, F, ..., W, X, Y, Z. Me atrevo a apostar que el conjunto de las letras de nuestro alfabeto y la W

$$\{A, B, C, D, E, F, ..., W, X, Y, Z\}$$

no es una partición de los alumnos de tu clase.
¿Por qué?

3 — LA RELACIÓN ...TIENE POR HERMANA A... EN UN CONJUNTO DE MUJERES Y VARONES

Dibuja un gráfico que pueda ser el de la relación

...tiene por hermana a...

en un conjunto de mujeres y varones.

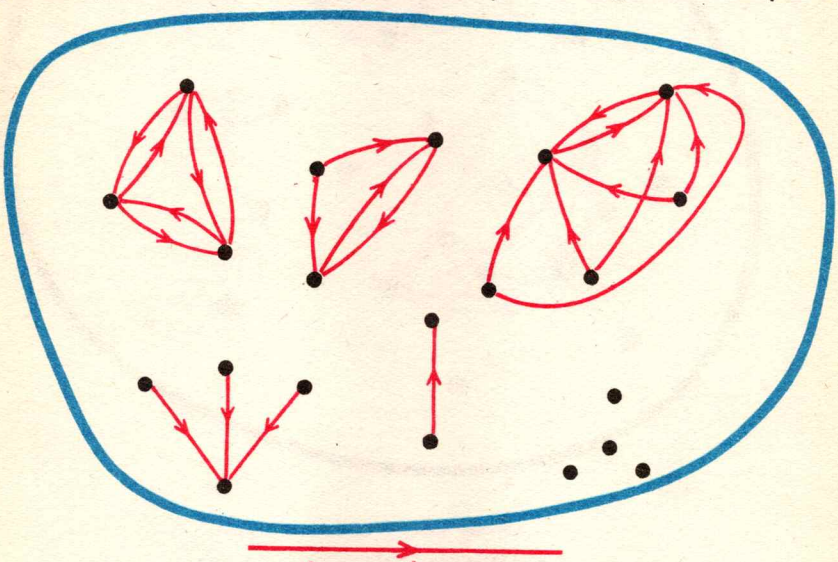
Este gráfico, ¿puede presentar lazos?

Si una flecha va de *a* a *b*, ¿se tiene siempre una flecha de *b* a *a*?

Si una flecha va de *a* a *b* y una de *b* a *c*, ¿se tiene siempre una flecha de *a* a *c*?

En particular, si se tiene una flecha de *a* a *b* y una de *b* a *a*, ¿se tendrá una de *a* a *a*?

¿Pueden partir muchas flechas de un mismo punto o llegar al mismo punto?



EN UN CONJUNTO DE MUJERES Y VARONES

GRÁFICO 8

Puedes determinar el sexo de las personas que están representadas por puntos de los cuales parte o a los cuales llega por lo menos una flecha.

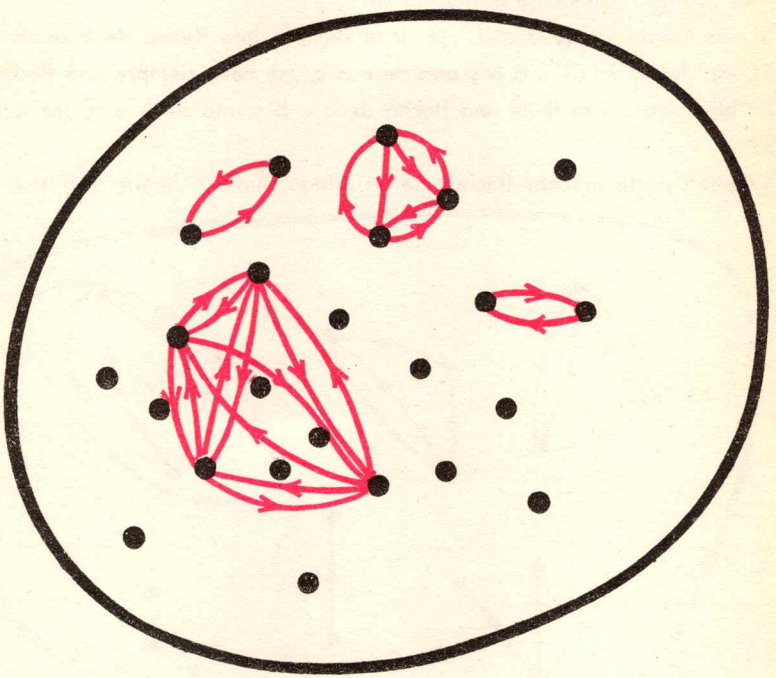
¿Cómo?

4 — LA RELACIÓN . . . TIENE POR HERMANA A . . . EN UN CONJUNTO DE MUJERES

Dibuja un gráfico que pueda ser el de relación . . . *tiene por hermana a* . . . en un conjunto de mujeres.

Si una flecha va de *a* a *b*, ¿debe haber una flecha de *b* a *a*?

Aquí tenemos un gráfico que responde a la pregunta



. . . tiene por hermana a . . .
EN UN CONJUNTO DE MUJERES
GRÁFICO 9

EJERCICIO

Nos presentan el gráfico siguiente como el de la relación ...*tiene por hermana a*... en un conjunto de mujeres. Dibuja las flechas que el autor del dibujo ha olvidado, *con seguridad*, trazar.

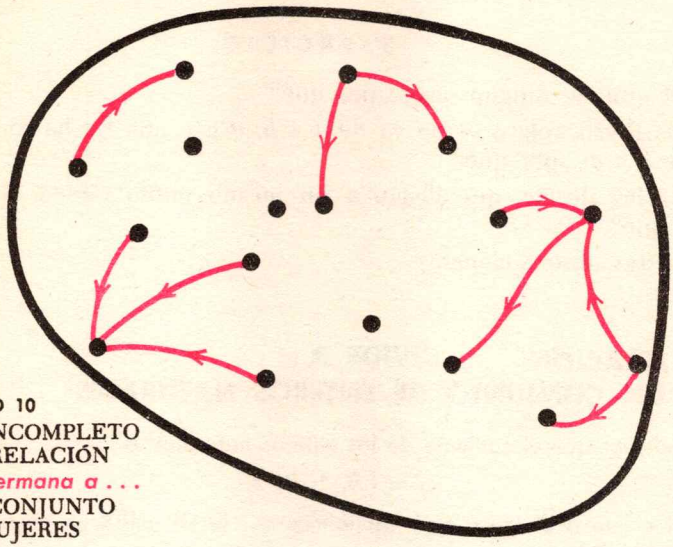


GRÁFICO 10
GRÁFICO INCOMPLETO DE LA RELACIÓN
... tiene por hermana a ...
EN UN CONJUNTO DE MUJERES

5 — LA RELACIÓN ... TIENE POR HERMANO O HERMANA A...

La relación ...*tiene por hermano a*... y la relación ...*tiene por hermana a*... están representadas en el dibujo siguiente

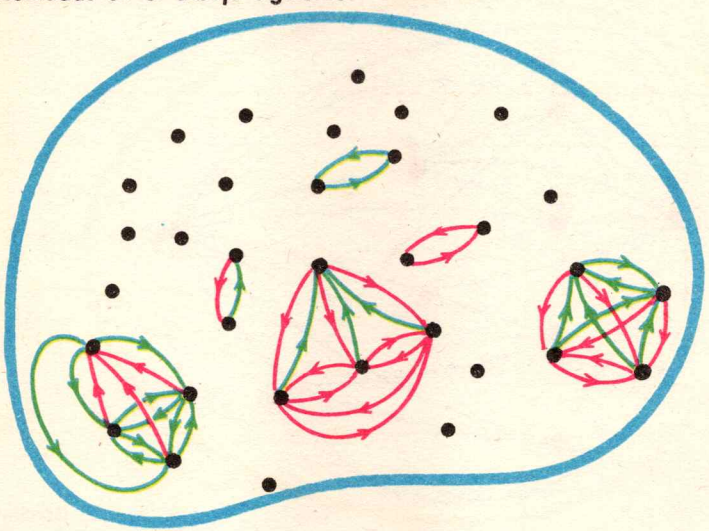


GRÁFICO 11

Si se consideran simultáneamente las flechas rojas y verdes, se obtiene el gráfico de la relación . . . *tiene por hermano o hermana a* . . .

Esta relación es la *unión* de las precedentes.

EJERCICIO

En el gráfico, ningún lazo; ¿por qué?

Si una flecha roja o verde va de a a b, existe una flecha roja o verde que va de b a a; ¿por qué?

Todas las flechas que llegan a un mismo punto tienen el mismo color; ¿por qué?

Haz otras observaciones.

6 — LA RELACIÓN . . . DIVIDE A . . . EN UN CONJUNTO DE ENTEROS NATURALES

Recordemos que el conjunto de los enteros naturales es

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}.$$

Se dice que a divide a b, y escribimos $a \mid b$, ssi existe un entero natural q tal que $b = aq$. Así

$2 \mid 6$	ya que $6 = 2 \cdot 3$;	$1 \mid a$	ya que $a = a \cdot 1$;
$7 \mid 7$	ya que $7 = 7 \cdot 1$;	$a \mid 0$	ya que $0 = a \cdot 0$;
$9 \mid 0$	ya que $0 = 9 \cdot 0$;	$a \mid a$	ya que $a = a \cdot 1$.

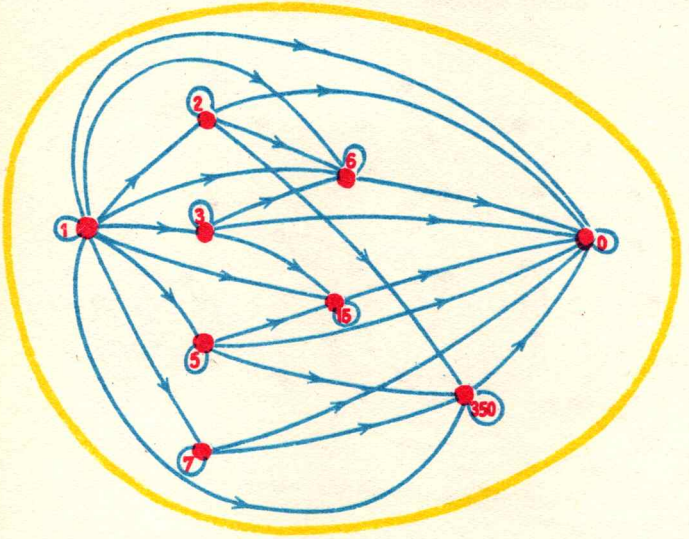


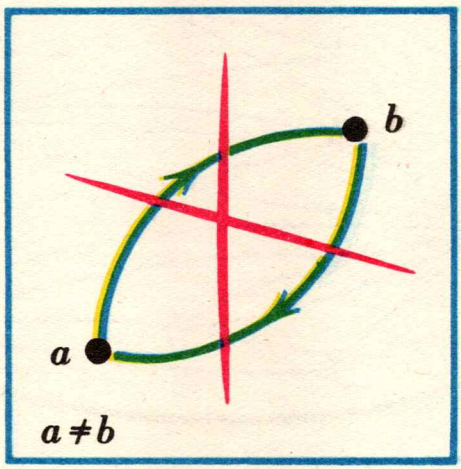
GRÁFICO 12

LA RELACIÓN EN EL CONJUNTO $\{1, 2, 3, 5, 7, 6, 15, 350, 0\}$

El gráfico de la relación | presenta un lazo en cada uno de sus puntos.

Si *a* y *b* son puntos *diferentes*, nunca puede haber a la vez una flecha que vaya de *a* a *b* y una flecha que "vuelva" de *b* a *a*.

Esto lo expresamos brevemente por



ENTRE DOS PUNTOS DIFERENTES, NUNCA IDA Y VUELTA

Cualesquiera que sean *a*, *b*, *c*,

$$(a \mid b \text{ y } b \mid c) \text{ implica } a \mid c).$$

Si una flecha va de *a* a *b* y una de *b* a *c*, existe una flecha que va de *a* a *c*.

EJERCICIOS

1. Haz un gráfico de la relación | en

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 15, 25, 900\}$$

En el mismo dibujo traza el gráfico de la relación

...es múltiplo de...

¿Cómo has procedido?

2. ¿Quieres colocar números en cada uno de los puntos del gráfico 13 de modo que resulte un gráfico de la relación | ?

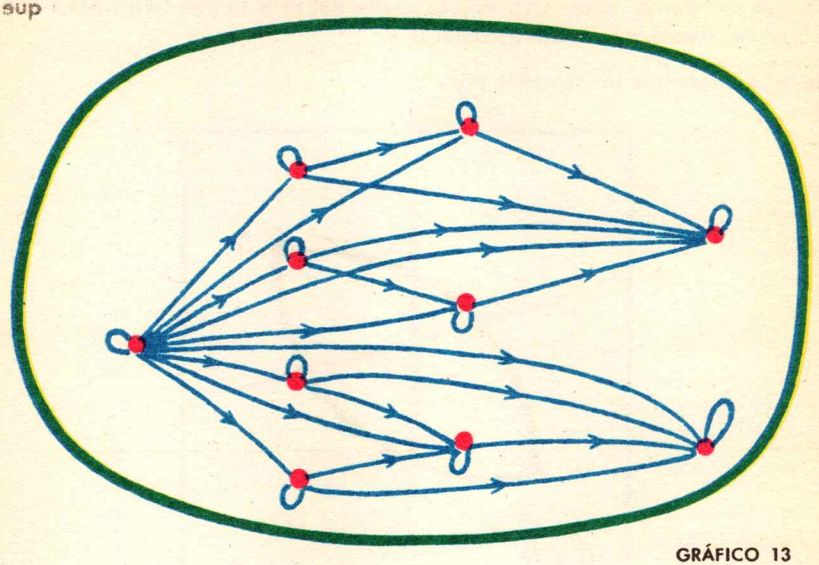


GRÁFICO 13

Da otras soluciones a esté problema.
¿Podrías indicar uno o varios procedimientos que permitan encontrar nuevas soluciones a este problema a partir de una solución dada?

3. Se ha esbozado el gráfico de la rélación | en un conjunto de números enteros naturales.

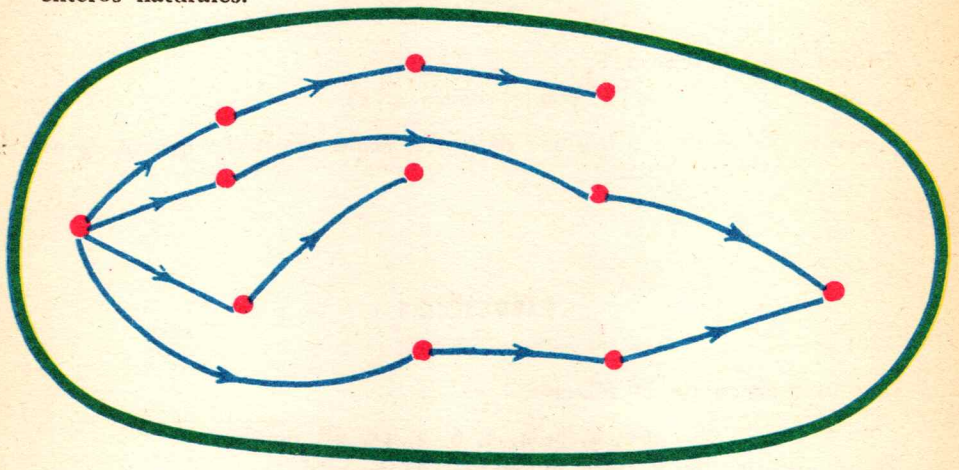


GRÁFICO 14

¿Cuáles son las flechas que deberán con seguridad trazarse en el gráfico?

4. Sabemos que **una relación es un conjunto de pares ordenados.**

Se pide escribir la relación | en { 1, 2, 3, 5, 7, 6, 15, 350, 0 } como conjunto de pares ordenados.

Respuesta: { (1,1), (1,2), (1,3), (1,5), (1,7), (1,6), (1,15), (1,350), (1,0), (2,2), (2,6), (2,350), (2,0), (3,3), (3,6), (3,15), (3,0), (5,5), (5,15), (5,350), (5,0), (7,7), (7,350), (7,0), (6,6), (6,0), (15,15), (15,0), (350,350), (350,0), (0,0) }

5. Dibuja el gráfico de la relación

{ (5,5), (6,2), (2,6), (38,8), (39,38), (8,39) }

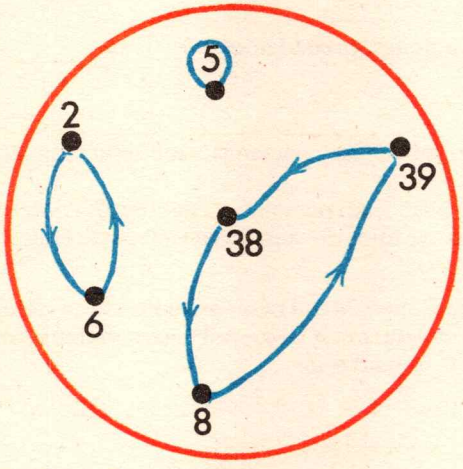


GRÁFICO 15

— LA RELACIÓN ... TIENE POR PADRE A ...

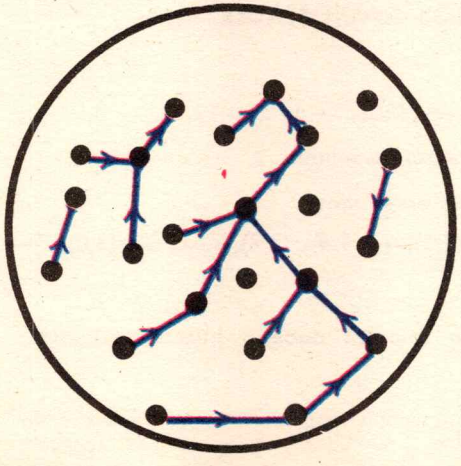


GRÁFICO 16

En este gráfico:

1. De cada punto parte al menos una flecha.
2. ¡Ningún lazo!
3. Si una flecha va de *a* a *b*, ¡no hay flecha de *b* a *a*!
4. Si una flecha va de *a* a *b* y una flecha de *b* a *c*, ¡no hay flecha de *a* a *c*!

EJERCICIOS

1. Justifica las observaciones precedentes.

2. En el gráfico 16, indica las personas que con seguridad son del sexo masculino.
Muestra dos hermanos; una persona y su abuelo paterno; una persona y su tío; una persona y uno de sus bisabuelos varones.

3. Reproduce el gráfico anterior. Traza en verde una flecha de *a* a *b* cada vez que haya una violeta de *b* a *a*. Así vas a obtener en verde el gráfico de la relación ...*es el padre de*...

8 — UNA RELACIÓN EN EL CONJUNTO Z DE LOS ENTEROS RACIONALES [1]

$$\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$$

es el conjunto de los enteros racionales.

El conjunto de pares ordenados

$$\mathcal{C} = \{(0,5), (1,6), (-1,4), (2,7), (-2,3), (3,8), (-3,2), \ldots\}$$

es una relación en **Z**.

El gráfico de esta relación debería hacerse trazando una flecha de todo $z \in \mathbf{Z}$ vers $z + 5$.

[1] En este parágrafo se presenta el conjunto Z con el carácter de concepto primitivo.

En el dibujo no es posible representar simultáneamente todos los enteros racionales por puntos. Nos limitaremos a marcar algunos e indicaremos las flechas correspondientes a esos únicos puntos.

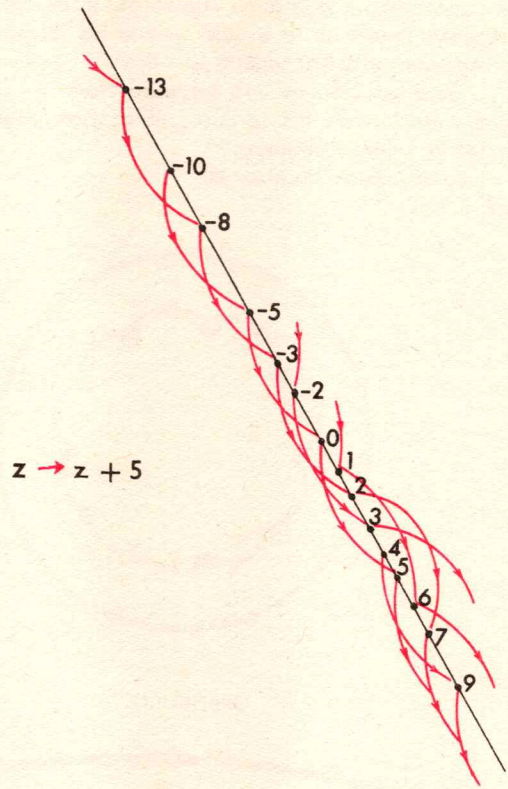


GRÁFICO 17

A todo punto de **Z** llega y de todo punto de **Z** parte una, y solo una, flecha de la relación.

Es lo que se expresa brevemente diciendo que la relación considerada es una **permutación** en **Z**.

EJERCICIO

Se habría podido indicar la relación $\mathfrak{C}$ mencionada anteriormente escribiendo

$$\mathfrak{C} = \{ (z,\ z + 5) \mid z \in Z \}$$

9 — UNA PERMUTACIÓN EN UN CONJUNTO DE ALUMNAS

Tenemos un conjunto de 10 alumnas que tienen nombres diferentes. Escribimos el nombre de cada una en una tarjeta y "barajamos" las tarjetas. Luego las distribuimos entre las alumnas (cada alumna recibe una sola tarjeta).

Se pide a cada alumna que tome con su mano *derecha* la mano *izquierda* de la alumna cuyo nombre figura en la tarjeta que le ha tocado.

Se puede representar gráficamente la relación . . . *toma con su derecha la mano izquierda de* . . . Esta relación es una **permutación.**

Según la distribución de las tarjetas, el gráfico puede presentar aspectos muy diferentes. Vamos a dibujar algunos.

¿Quieres comentar estas situaciones?

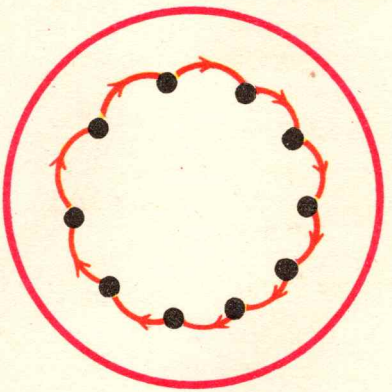


GRÁFICO 18

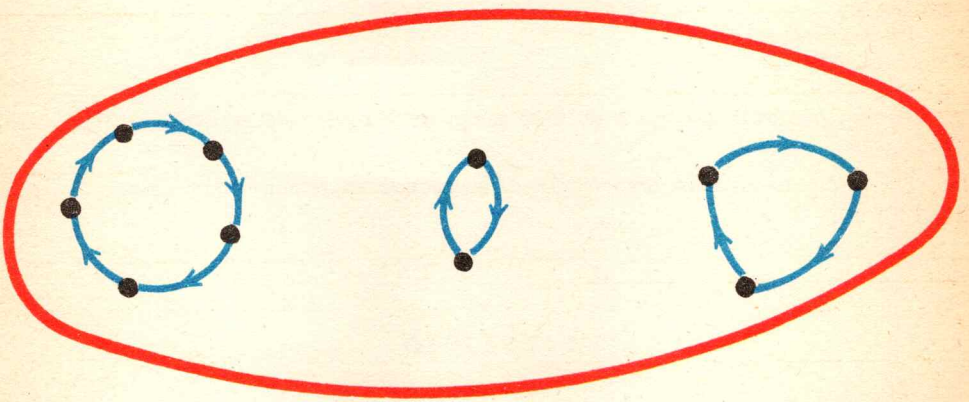


GRÁFICO 19

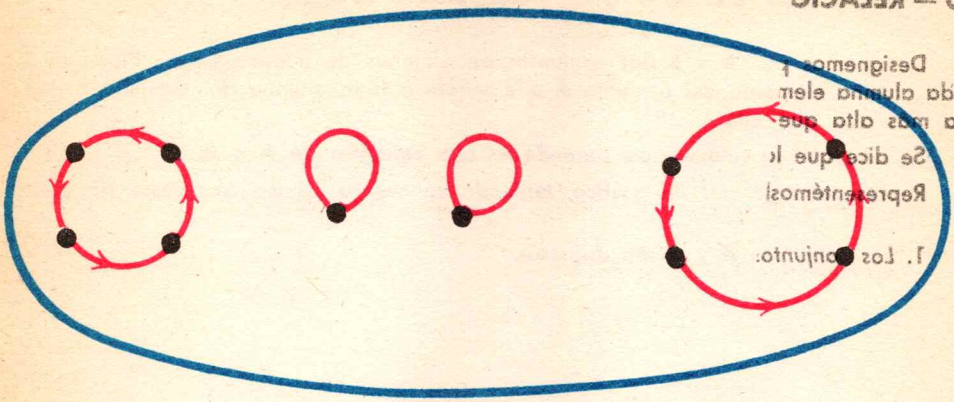


GRÁFICO 20

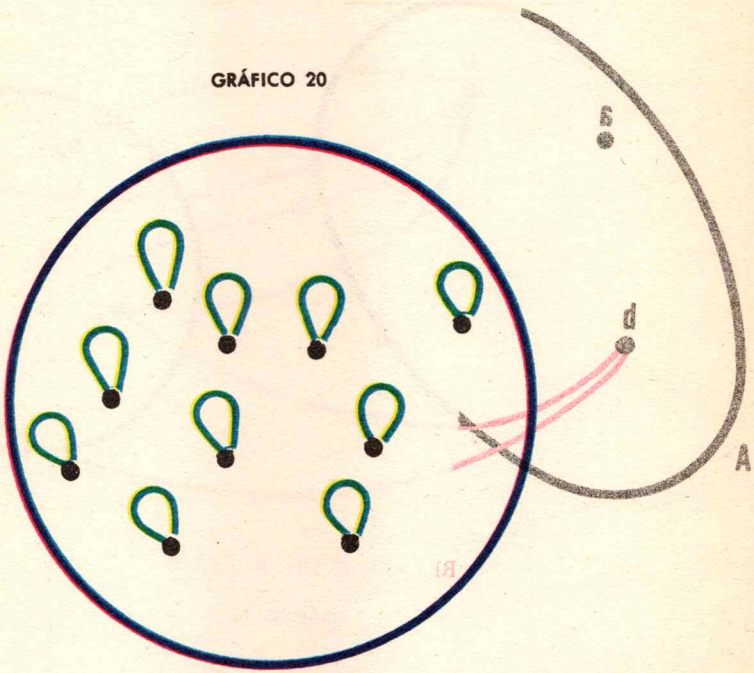


GRÁFICO 21

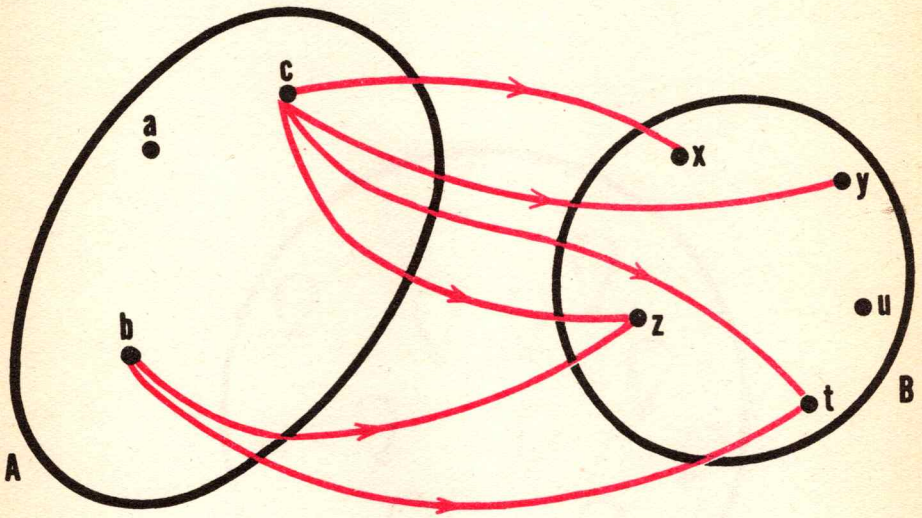
10 — RELACIÓN DE A a B — PRODUCTO A x B

Designemos por A y B dos conjuntos de alumnas de nuestra clase. Pidamos a cada alumna elemento del conjunto A que *señale* a toda alumna del conjunto B que sea más alta que ella.

Se dice que la relación así definida es una **relación de A a B.**

Representémosla por un gráfico, teniendo en cuenta los diversos casos posibles.

1. *Los conjuntos A y B son disjuntos.*



RELACIÓN DE A A B

GRÁFICO 22

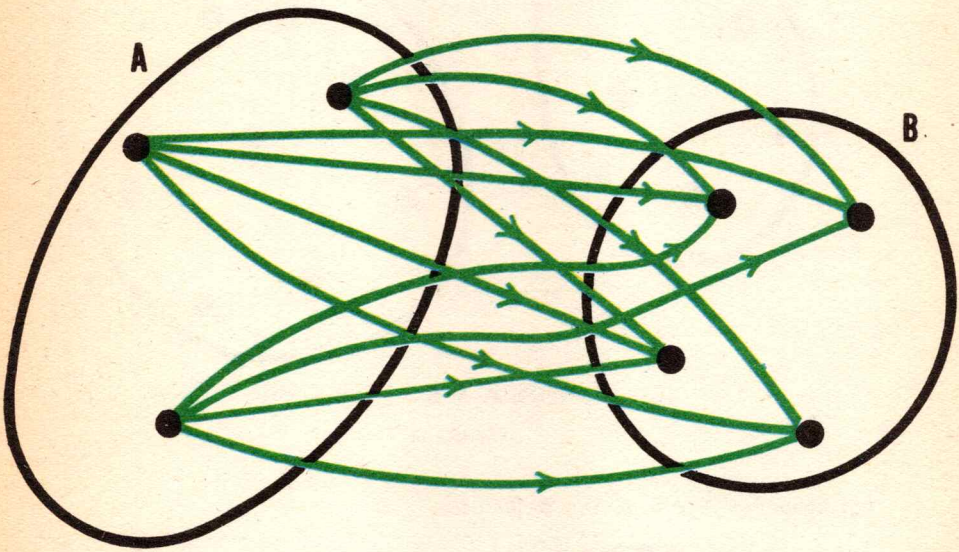
EJERCICIO

¿Quieres clasificar por orden de estatura las alumnas *a*, *b*, *c*, *u*, *x*, *z*?

2. *Los conjuntos A, B son disjuntos, y toda alumna de A es más baja que toda alumna de B.*

Esta vez, de todo punto de A parte una flecha a cada uno de los puntos de B.

La relación obtenida se llama **producto de A y B** y se indica **A X B.**



A X B

GRÁFICO 23

Se tiene, pues,

$$\{a, b, c\} \times \{x, y, z, t\} = \{(a, x), (a, y), (a, z), (a, t), (b, x), (b, y), (b, z), (b, t), (c, x), (c, y), (c, z), (c, t)\}$$

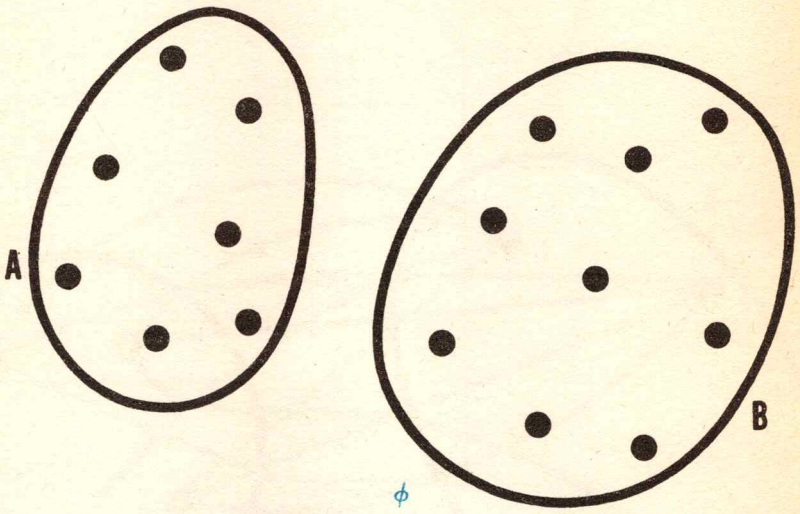
El producto A × B es el conjunto de los pares ordenados (a, b) tales que a $a \in A$ *y* $b \in B$

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Los conjuntos A y B son disjuntos y ninguna alumna de B es más alta que una alumna de A.

Esta vez nuestra tarea es fácil: no se debe trazar ninguna flecha.

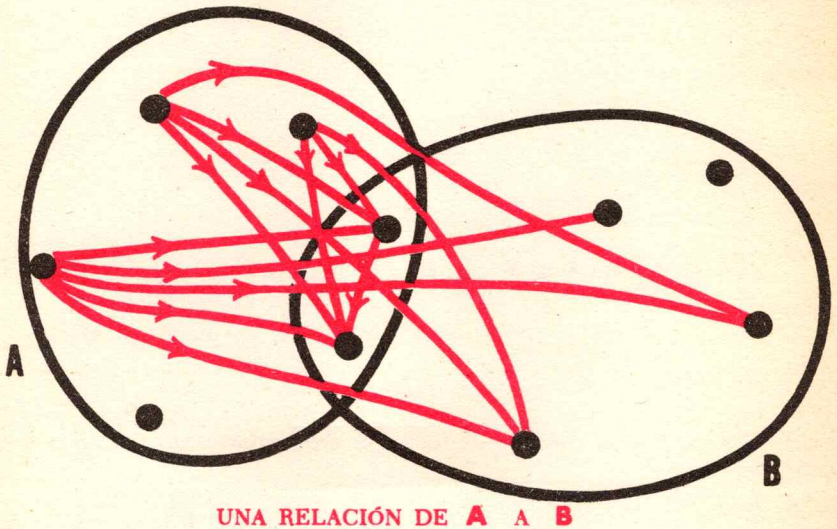
La relación obtenida es vacía.



UNA RELACIÓN DE **A** A **B** : LA RELACIÓN VACÍA

GRÁFICO 24

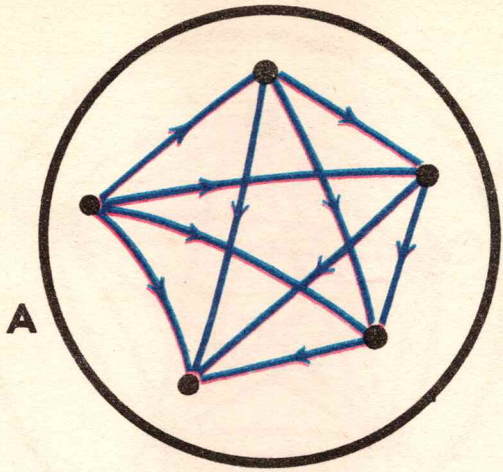
Los conjuntos A y B no son disjuntos.



UNA RELACIÓN DE **A** A **B**

GRÁFICO 25

5. Si A = B, se tendrá una relación en A.



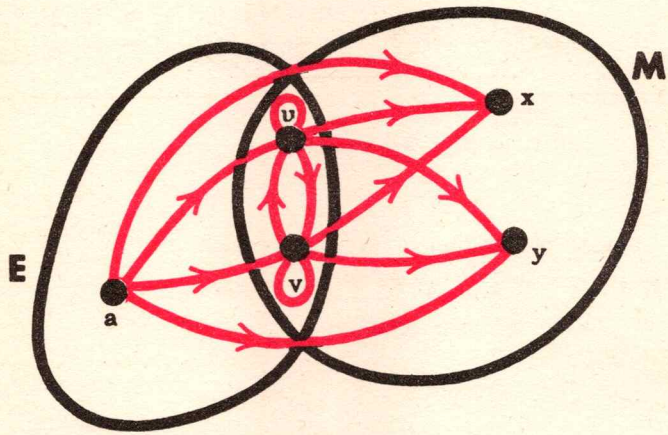
UNA RELACIÓN EN **A**

GRÁFICO 26

EJERCICIOS

1. Sea $E = \{ a, u, v \}$ y $M = \{ x, y, u, v \}$
¿Quieres definir $E \times M$ por extensión y representar $E \times M$ por un gráfico?

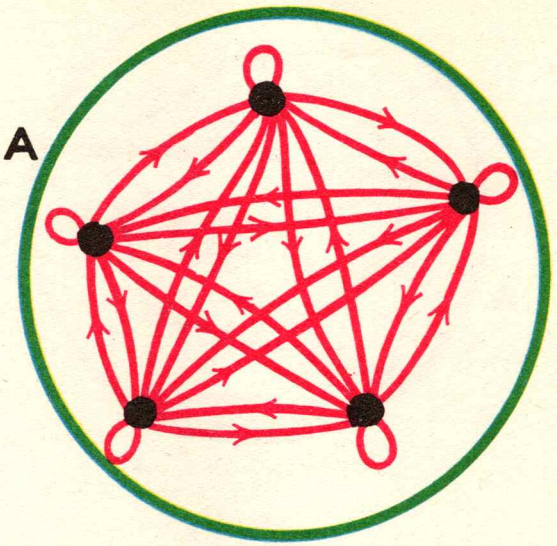
$$E \times M = \{ (a, u), (a, v), (a, x), (a, y), (u, u), (u, v), (u, x), (u, y), (v, u), (v, v), (v, x), (v, y) \}$$



E × M

GRÁFICO 27

2. Sea $A = \{ a, b, c, x, y \}$
Define por extensión y traza un gráfico de $A \times A$.



A X A

GRÁFICO 28

3. $\{ 1, 2, 3 \} \times \{ 5, 6, 7, 8, 9 \} = \{ (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (2, 9), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (3, 9) \}$

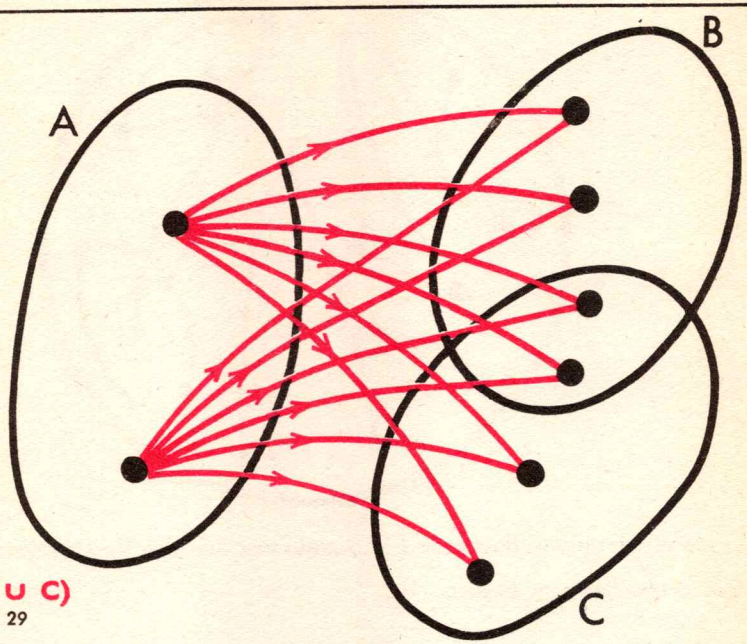
4. $\{ a, b, c, d \} \times \{ u, v, w, x, y, z \} = \ldots$

5. Se pide calcular el producto
$\{ 1, 2, 3 \} \times \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$
y trazar el gráfico de esta relación.

11 – DISTRIBUTIVIDAD DE x CON RESPECTO A ∪

Si cada una de las letras A, B, C designa un conjunto,

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$



A × (B ∪ C)
GRÁFICO 29

Señala el conjunto de las flechas de $A \times B$,
el conjunto de las flechas de $A \times C$,
el conjunto de las flechas de $A \times (B \cup C)$,
el conjunto de las flechas de $(A \times B) \cup (A \times C)$,

Cada uno de los términos $A \times (B \cup C)$ y $(A \times B) \cup (A \times C)$ designa el conjunto de los pares ordenados cuyo origen pertenece a A y cuyo extremo pertenece a $B \cup C$.

La ley × es distributiva con respecto a la ley ∪

Si cada una de las letras A, B, C designa un conjunto, se tienen las fórmulas de distributividad:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \qquad (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \qquad (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$
$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C) \qquad (A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$$

EJERCICIO

Justifica las fórmulas precedentes.

12 — RECÍPROCA DE UNA RELACIÓN

Una relación **R** definida en el conjunto E está representada por el gráfico siguiente:

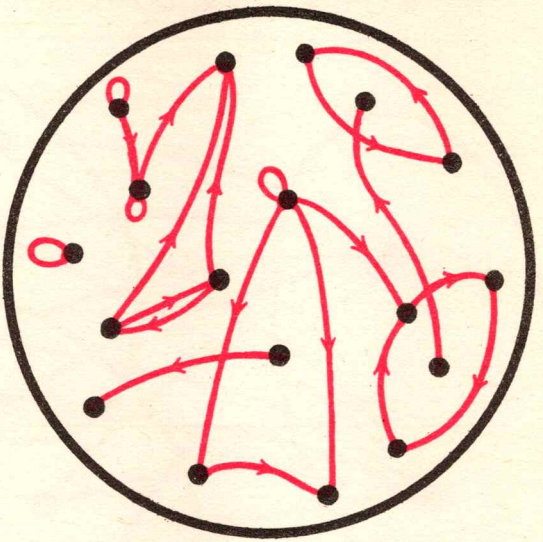
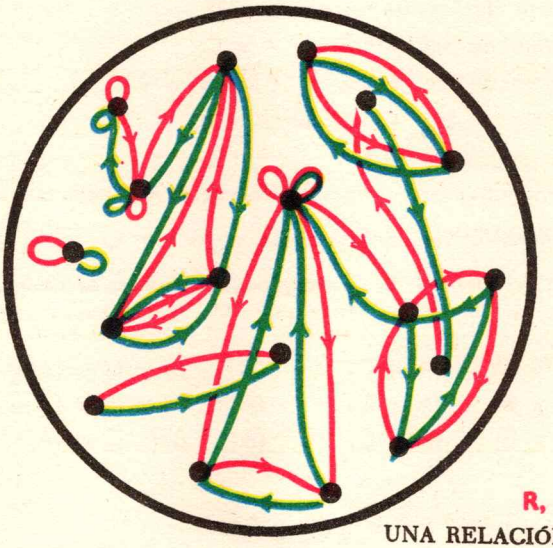


GRÁFICO 30

Traza en verde una flecha de *b* a *a* cada vez que una flecha roja vaya de *a* a *b*.

Vas a obtener este gráfico:



R, R^{-1}

UNA RELACIÓN Y SU RECÍPROCA

GRÁFICO 31

Las flechas rojas definen la relación R.

Las flechas verdes definen una relación que se designa R^{-1} y que se llama **recíproca de R.**

El par ordenado (a, b) se llama, del mismo modo, **par ordenado recíproco** de (b, a).

EJERCICIOS

1. La recíproca de la relación "...*tiene por padre a*...". en un conjunto de personas de los dos sexos es la relación "....*es padre de*..?".

2. La recíproca de la relación "....*tiene por hermana a*..?" en un conjunto de mujeres y varones es la relación "....*es hermana de*...". Estas dos relaciones no son iguales.

3. La recíproca de la relación | es la relación "....*es múltiplo de*...".

4. La recíproca de una permutación en un conjunto es una permutación en ese conjunto.

5. Si H designa la relación "....*tiene por hermano a*..?" definida en un conjunto de varones, se tiene $F^{-1} = F$.

6. Si P es la relación "....*tiene por padre a*..?" definida en un conjunto de personas, se tiene $P \cap P^{-1} = \phi$.

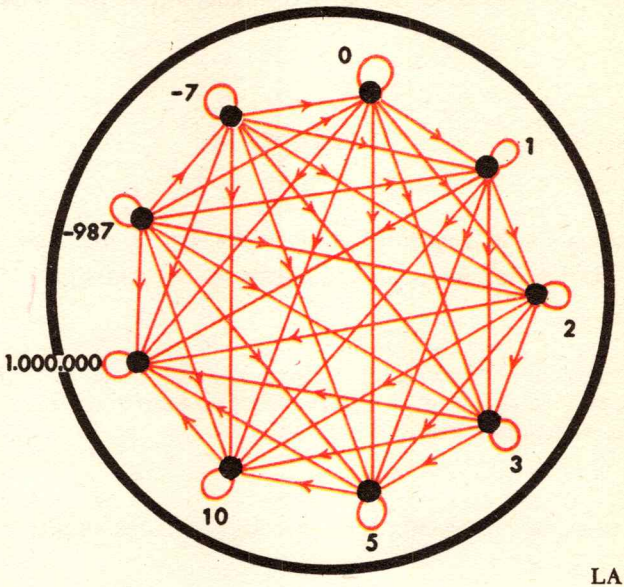
7. Las relaciones

   ...*tiene por padre a*...
   ...*tiene por hijo a*...

   definidas en un conjunto de hombres y mujeres, ¿son recíprocas?

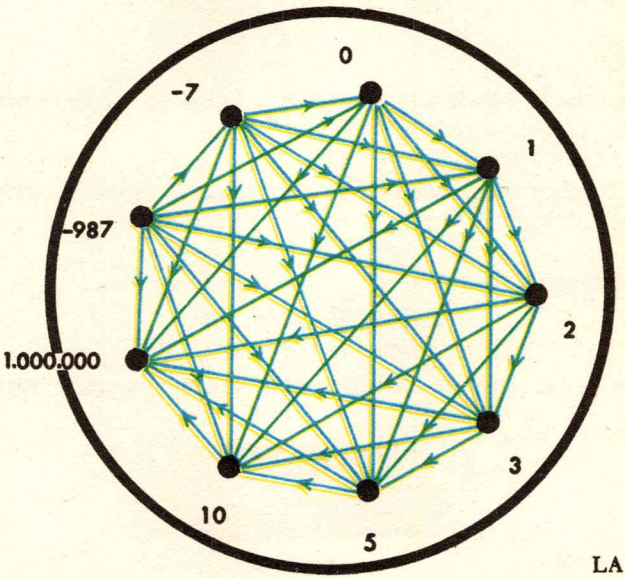
13 — RELACIONES $\leqslant$, $<$, $\geqslant$, $>$

Traza los gráficos de las relaciones $\leqslant$, $<$, $\geqslant$, $>$ definidas en el conjunto { 5, 0, 2, 1, — 7, 1.000.000, — 987, 3, 10 }



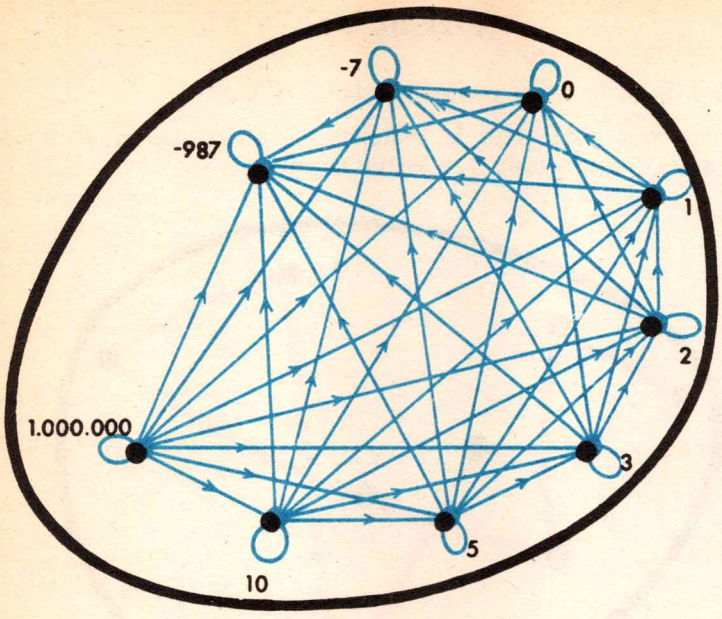
LA RELACIÓN $\leqslant$

GRÁFICO 32



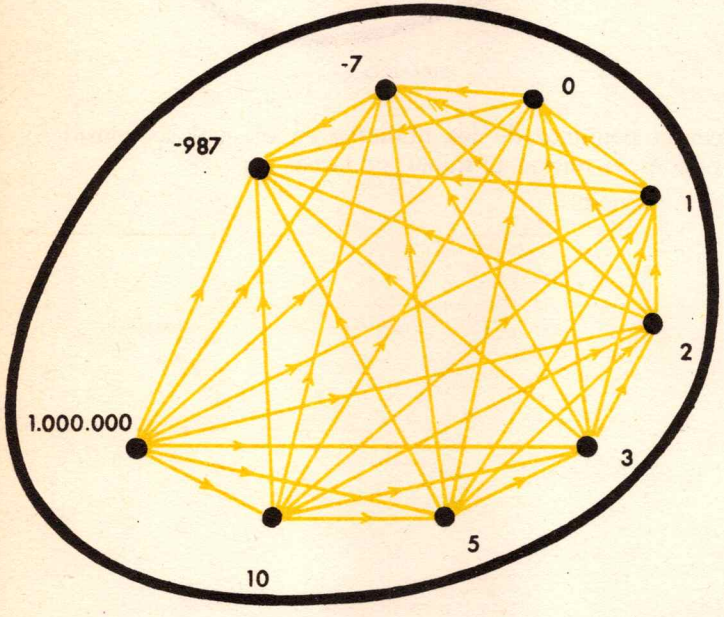
LA RELACIÓN $<$

GRÁFICO 33



LA RELACIÓN ⩾

GRÁFICO 34



LA RELACIÓN >

GRÁFICO 35

EJERCICIOS

1. ¿Cuáles son las relaciones recíprocas de $\leqslant$ y $>$?

2. Los alumnos que dibujaban la relación $\leqslant$, abandonaron el trabajo dejando el gráfico inconcluso que vemos aquí:

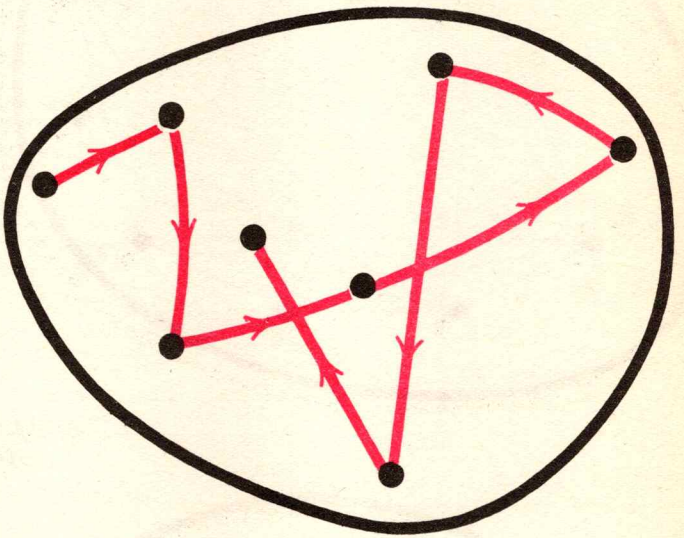


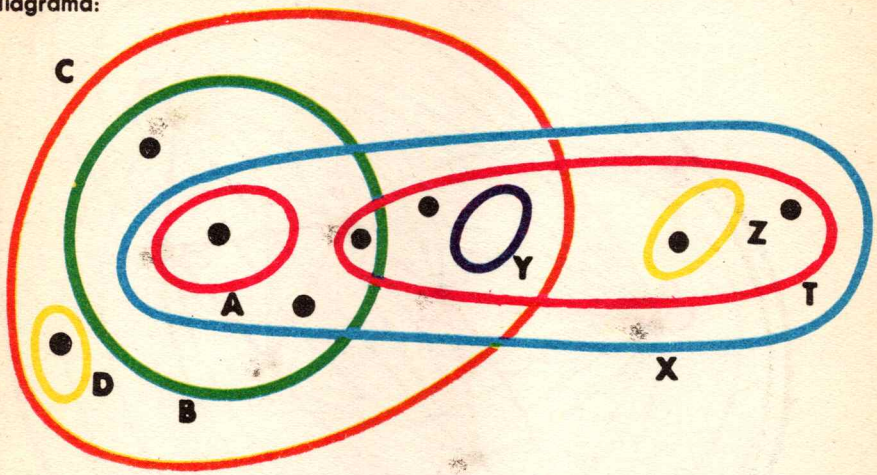
GRÁFICO 36

Sin conocer el conjunto de los números en el cual se consideró la relación $\leqslant$, puedes lo mismo terminar su tarea.

¡Hazles este servicio!

14 — RELACIONES EN UN CONJUNTO DE CONJUNTOS

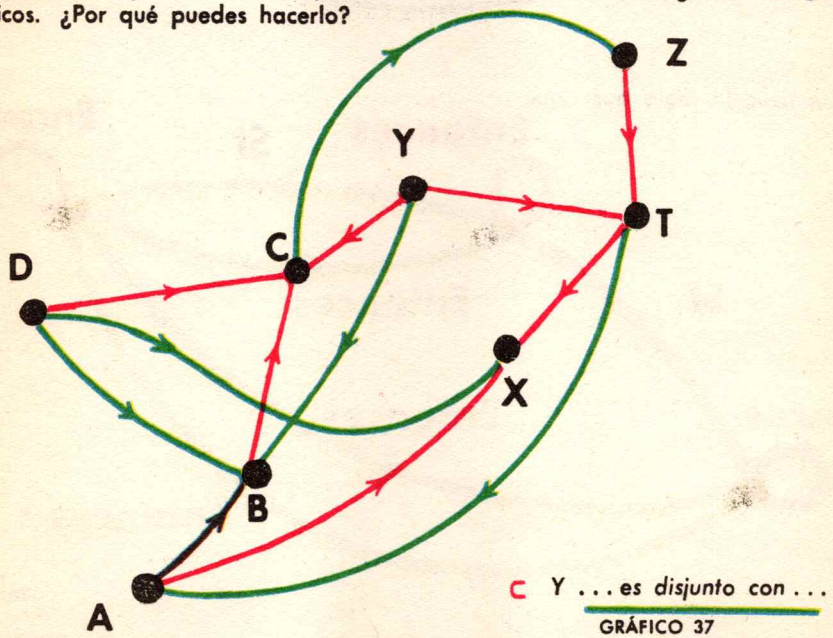
Sea $\mathfrak{E} = \{ A, B, C, D, X, Y, Z, T \}$ un conjunto de conjuntos representado por este diagrama:



Dibuja en rojo un gráfico de la relación $\subset$ definida en $\mathfrak{E}$ y en verde (en el mismo dibujo) un gráfico de la relación ... *es disjunto con* ... definida en $\mathfrak{E}$.

Termina este trabajo antes de leer lo que sigue.

En el gráfico siguiente no se han representado más que algunas flechas rojas y verdes. Pero han sido elegidas de modo tal que puedas reconstituir totalmente los gráficos de $\subset$ y de "... *es disjunto con* ...", sin mirar el diagrama de $\mathfrak{E}$ ni tus gráficos. ¿Por qué puedes hacerlo?



$\subset$ Y ... *es disjunto con* ...

GRÁFICO 37

Aquí tenemos los gráficos pedidos.

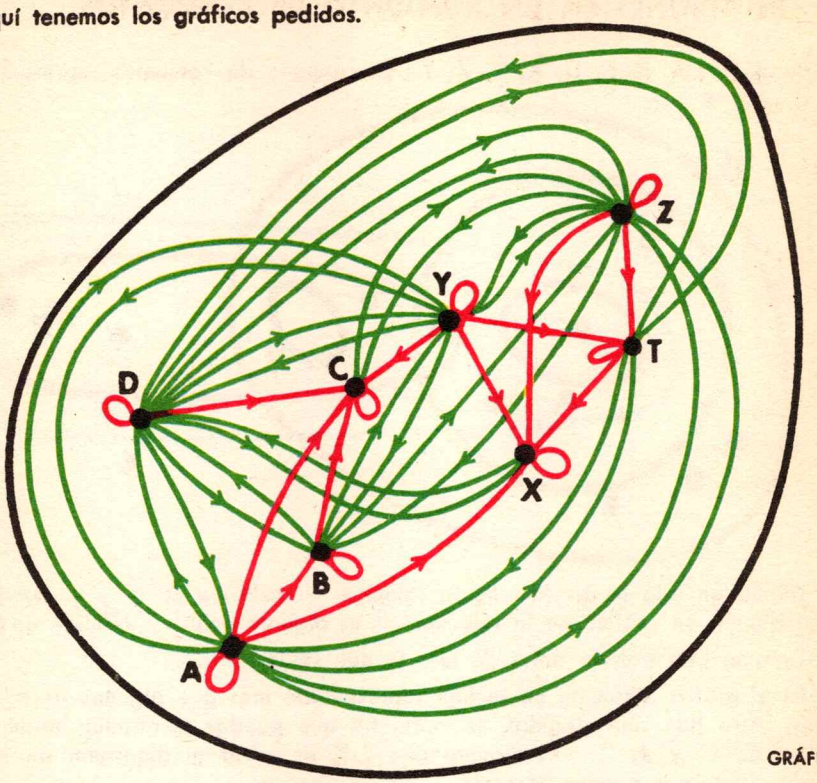


GRÁFICO 38

Se tiene la regla que sigue

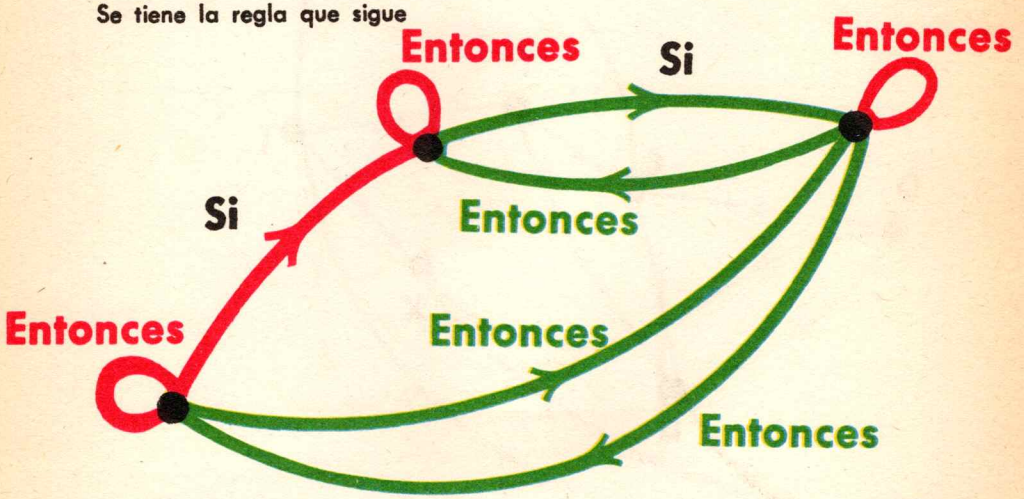
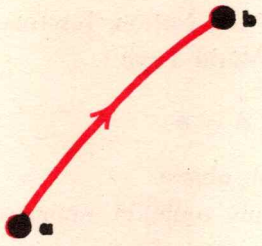


GRÁFICO 39

15 — IMAGEN DE UN CONJUNTO POR UNA RELACIÓN

Sea R una **relación**, es decir, un **conjunto de pares ordenados.**
Llamemos *a* al origen y *b* al extremo del par ordenado (*a*, *b*).



(*a*, *b*)

DEFINICIÓN — *Designaremos por RA el conjunto de los extremos de los pares ordenados (o flechas) de R que tienen su origen en el conjunto A.*
El conjunto RA se llama ***imagen de A por R.***

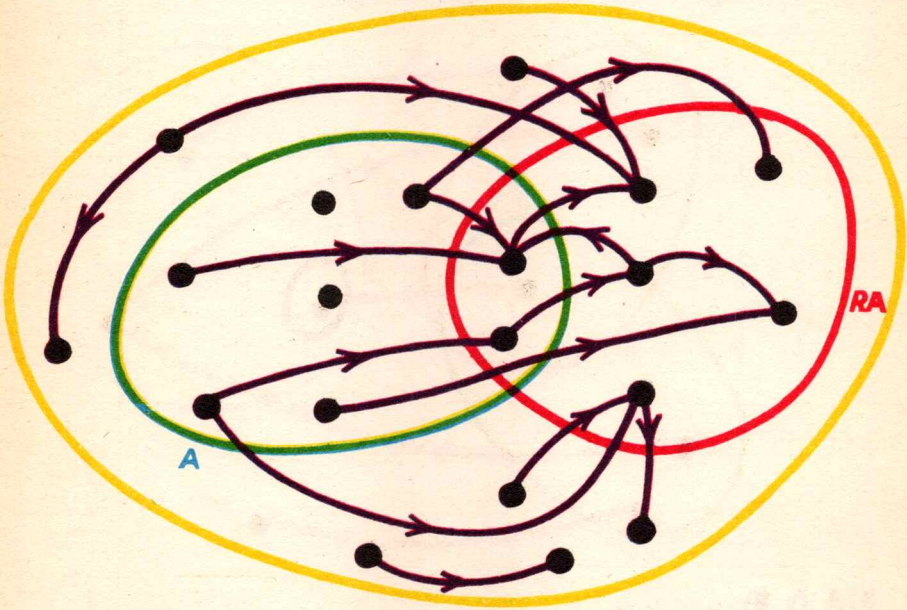


GRÁFICO 40

EJERCICIOS

1. Si designamos por R la relación definida por el gráfico 1:
   R { Francisca Viñas, Nora Garçon, Dora Díez, Josefina Nancy }
   = { Ana Norton, Josefina Nancy, Dora Díez, Marta Dams, Mónica Dumas }.
   R { Judith Martin } = ϕ .
   R { Norma Russo } = { Ana Norton, Josefina Nancy }
   R { Lucía Masar } = { Marta Lago }.

2. Para toda relación R : R $\phi = \phi$.

3. Sea R una relación y x un objeto.
   La imagen R { x } de un conjunto unitario, ¿es siempre un conjunto unitario?

4. Si cada una de las letras A, B designa un conjunto y R una relación, se tienen las fórmulas

$$A \subset B \Rightarrow RA \subset RB$$
$$R(A \cup B) = RA \cup RB$$
$$R(A \cap B) \subset RA \cap RB$$

   La figura que vemos a continuación muestra que en la última fórmula no se puede remplazar el signo $\subset$ por el signo $=$.

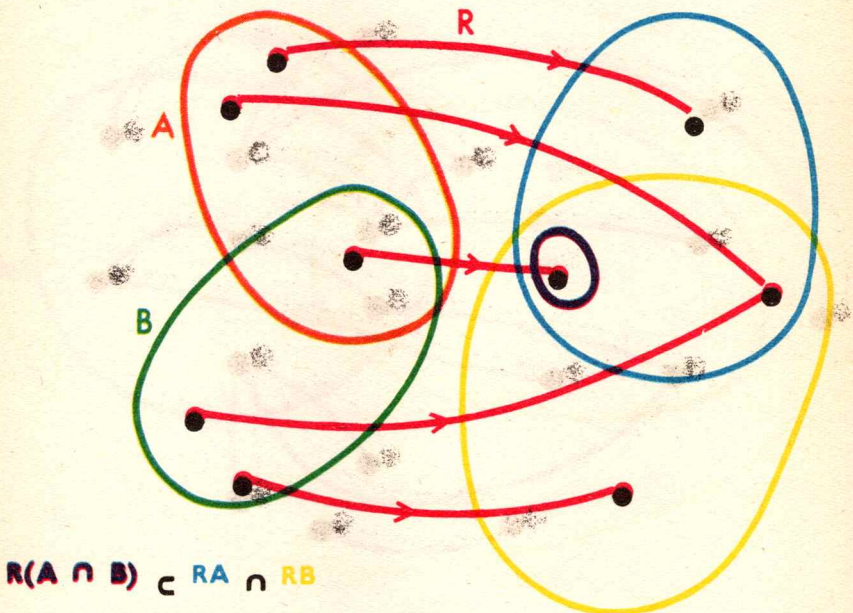


GRÁFICO 41

16 — EJERCICIOS DE RECAPITULACIÓN

1. *Las relaciones son conjuntos de pares ordenados.*

Se las puede, pues, tratar como conjuntos.

Designemos por P la relación "... *tiene por padre a*...",
por M la relación "... *tiene por madre a*...",
por Z la relación "... *tiene por hijo a*...",
por D la relación "... *tiene por hija a*...".

Muestra que esas cuatro relaciones son disjuntas dos a dos y escribe las fórmulas que lo indican ($P \cap M = \phi$, ...).

La relación $P \cup M$ se expresa "... *tiene por padre o por madre a*...".

Se tiene también $P \cap P^{-1} = \phi$, $P \cap M^{-1} = \phi$.

Da otras fórmulas de este tipo.

Justifica la fórmula

$$(P \cup M)^{-1} = Z \cup D$$

Haz gráficos que puedan corresponder a las relaciones anteriores definidas en un conjunto de personas.

Se tiene también $Z \subset (P \cup M)^{-1}$

2. Representa por un diagrama el conjunto

$$E = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$$

y marca los 10 elementos de este conjunto.

Procúrate cartas de juego y escribe cada uno de los elementos de $E \times E$ en una, y solo una, carta.

¿Cuántas cartas tendrás que utilizar?

El conjunto de las cartas que has utilizado representa ahora $E \times E$.

Baraja esas cartas, que alguien corte, y toma el montón de la izquierda.

Ese montón representa una parte de $E \times E$, es decir, una relación R definida en E.

Representa esta relación por un gráfico en rojo.

La relación definida por el montón de la derecha es $(E \times E) \setminus R$.

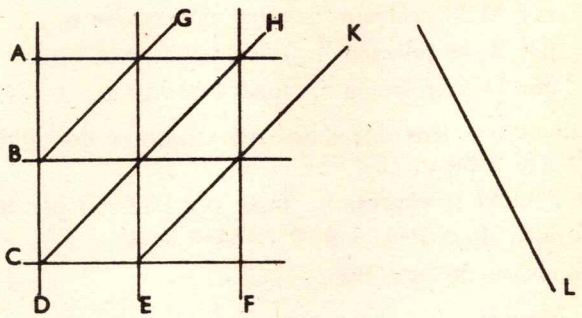
Junta las cartas, vuelve a mezclarlas y recomienza el juego.

Habrás definido de este modo una nueva relación S.

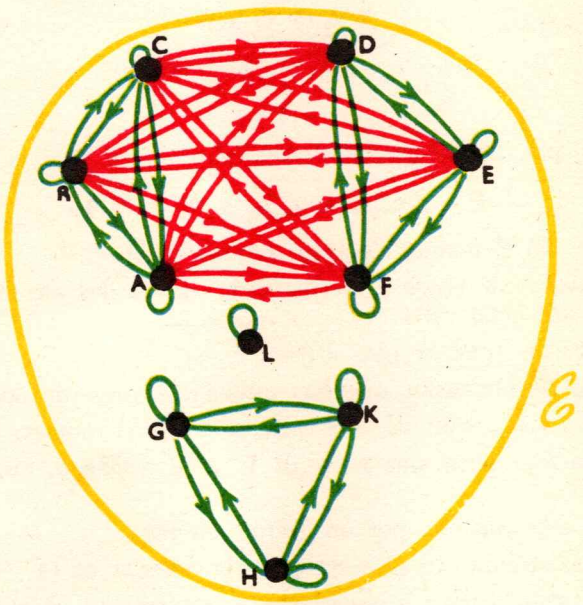
¿Quieres representar por gráficos de colores diferentes, S, $R \cap S$, $R \cup S$, $R \setminus S$, $S \setminus R$?

3. $\parallel$ y $\perp$ son relaciones definidas en el conjunto $\mathfrak{D}$ de las rectas del plano Π. Tenemos un conjunto $\mathfrak{E} = \{ A, B, C, D, E, F, G, K, L \}$ de rectas de ese plano.

¿Quiere dibujar en verde y rojo gráficos para las relaciones $\parallel$ y $\perp$ definidas en $\mathfrak{E}$.



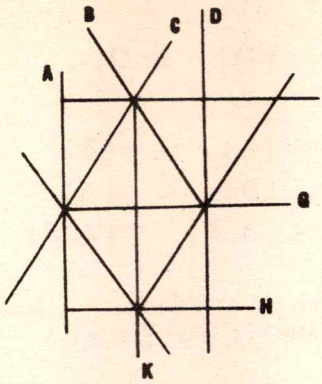
EN EL PLANO Π



$\perp$ $\parallel$

GRÁFICO 42

4. El mismo ejercicio.



EN EL PLANO Π

5. En el gráfico siguiente, los puntos representan rectas del plano Π, las flechas rojas representan la relación ⊥, las flechas verdes la relación ||.

Es, sin duda, un gráfico incompleto. ¿Quieres dibujar las flechas que con seguridad han sido olvidadas?

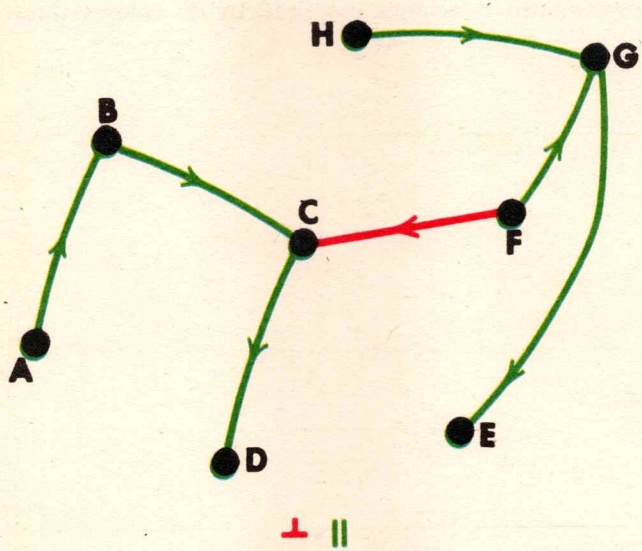


GRÁFICO 43

¿Quieres representar en el plano Π rectas A, B, C, D, E, F, G, H en la situación que muestra el gráfico 43?

6. Se tiene $\perp^{-1} = \perp$, $\|^{-1} = \|$, $\perp \cap \| = \phi$

7. Para toda recta $D \in \mathfrak{D}$: $\| \{D\} = dir\ D$

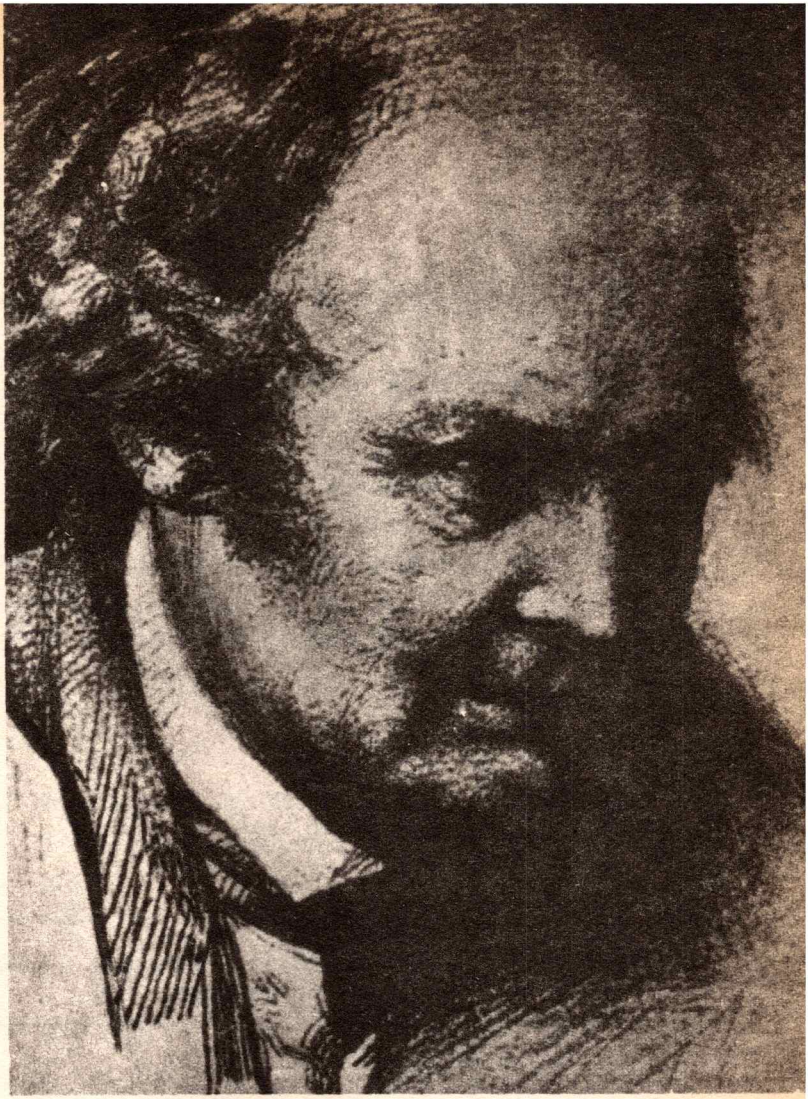
8. $A, B \in \mathfrak{D}$ y $A \perp B \Rightarrow$
$$\perp\{A\} = \|\{B\}$$
$$\perp\{B\} = \|\{A\}$$
$$\perp\{A, B\} = \|\{A, B\}$$

9. ¿Quieres dibujar un gráfico de la relación "...*tiene por duplo*..." en ω? Esta relación es el conjunto $\{(x, 2x) \mid x \in \omega\}$.

10. Un juego de naipes españoles (48 cartas) puede ser mirado como el producto

oro, copa, espada, basto $\} \times \{$ A, R, C, S, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2$\}$.

Representa por dos diagramas los dos conjuntos que figuran en el producto anterior y marca todos sus elementos por puntos.
Da cartas a cuatro jugadores.
El conjunto de las cartas recibidas por cada uno de los jugadores define una relación.
Representa esas cuatro relaciones por gráficos de colores diferentes.



***Arthur* CAYLEY**
(1821-1895)

Los gráficos que usamos para representar relaciones juegan actualmente un papel importante en muchas de sus aplicaciones: por ejemplo, en la teoría de los circuitos eléctricos, la teoría de la información, la sociología... Se hacen especialmente necesarios en cuestiones vinculadas con las grandes máquinas electrónicas.

El primer libro enteramente dedicado a los gráficos fue escrito en 1936 por König.

Pero desde 1878 Cayley utilizaba gráficos multicolores; especialmente para poner en evidencia ciertas propiedades de la teoría de los grupos.

Arthur Cayley, nacido en 1821, es uno de los fundadores del álgebra moderna. Su padre era un comerciante inglés que tenía negocios en Petrogrado y esperaba ver participar a su hijo en sus actividades comerciales. En el curso de brillantes estudios, Arthur Cayley manifestó en seguida un gran talento para la matemática, pero tuvo que consagrarse al derecho a fin de proveer a sus necesidades materiales. A los 42 años fue designado para ocupar la primera cátedra de matemática pura creada en la gran universidad de Cambridge y pudo, por fin, dedicarse enteramente a la matemática.

Ayudó a otro gran matemático inglés, Sylvester, que había residido en los Estados Unidos, a promover en ese país una enseñanza avanzada de la matemática, en particular dando una serie de conferencias en la Universidad Johns Hopkins.

8

Propiedades importantes de ciértas relaciones

1 — Al examinar los gráficos del capítulo VII comprobamos que las propiedades comunes dan un aire de familia a ciertas relaciones.

La matemática y muchas otras ciencias hacen uso constante de las relaciones.

Por eso es importante esbozar una especie de clasificación y poner en evidencia ciertas clases de relaciones que tienen importantes propiedades comunes.

2 — REFLEXIVIDAD

Los gráficos 5, 6, 12, 13, 21, 28, 32, 34 poseen una de las propiedades más visibles. Presentan un lazo en cada uno de sus puntos.

DEFINICIÓN — *Una relación se llama* ***reflexiva*** *si, y solamente si, su gráfico presenta un lazo en cada uno de sus puntos.*

1. La relación de igualdad es reflexiva.

2. Como una de nuestras compañeras ha declarado conocer "una persona que no se quiere a sí misma",
hemos sacado la conclusión de que la relación *quiere* (con este significado), definida en el conjunto de los seres humanos, no es reflexiva.
Como cada una de nuestras compañeras ha declarado que se quiere a sí misma, la relación *quiere*, definida en el conjunto de las alumnas de nuestra clase, es reflexiva.

3. El gráfico siguiente define una relación no reflexiva. ¿Por qué?

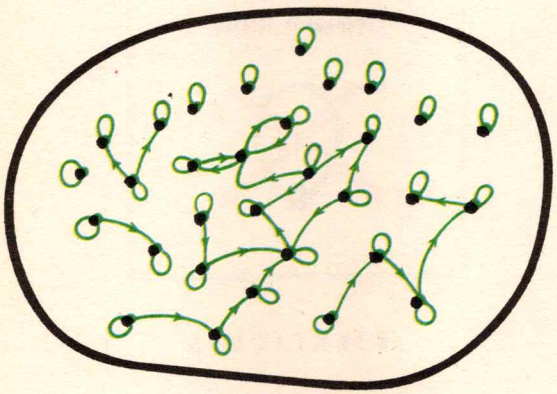


GRÁFICO 44

4. Es fácil construir una relación reflexiva a partir de una relación dada agregándole flechas. Basta dibujar un lazo en todos los puntos que no lo tienen. Si hacemos esto con la relación $<$, se obtiene la relación $\leqslant$.

5. La relación R es reflexiva si la relación R^{-1} es reflexiva.

6. *Si* R es una relación reflexiva y S una relación obtenida a partir de R por agregación de flechas, *entonces* la relación S es reflexiva.

7. La relación $\subset$ es reflexiva.

8. La relación $|$ es reflexiva.

9. La relación $\|$ es reflexiva.

3 — ANTIRREFLEXIVIDAD

DEFINICIÓN — *Una relación se llama* ***antirreflexiva*** *ssi su gráfico no presenta ningún lazo.*

EJERCICIOS

1. Los gráficos 7, 8, 9, 10, 11, 14, 16, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 25, 26, 29, 33, 35, 36, 40, 41, definen relaciones **antirreflexivas.**

2. Los gráficos 1, 2, 3, 4, 15, 20, 27, 30, definen relaciones que no son **ni reflexivas ni antirreflexivas.**

3. Da 7 ejemplos nuevos de relaciones que no sean reflexivas ni antirreflexivas.

4. La relación $\perp$ definida en $\mathfrak{D}$ es antirreflexiva.

5. La relación R es antirreflexiva si la relación R^{-1} es antirreflexiva.

6. La relación $<$ es antirreflexiva. También lo es, entonces, la relación $>$. ¿Por qué?

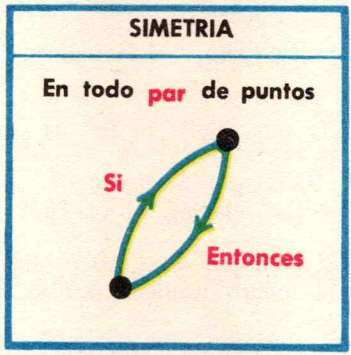
7. Si se sacan los lazos en una relación, se obtiene una relación antirreflexiva. Si se procede de este modo con la relación $\leqslant$ se obtiene la relación $<$.

8. ¿Cuál es la relación obtenida al sacar los lazos en la relación $\subset$?

9. La misma pregunta para $|$

4 — SIMETRÍA

DEFINICIÓN — Una relación es ***simétrica*** *ssi cada vez que su gráfico presenta una flecha que va de* ***a*** *a* ***b****, presenta también una flecha que va de* ***b*** *a* ***a****.*



Una relación es, pues, simétrica si, y solamente si, es igual a su recíproca.

$$R \text{ simétrica} \iff R = R^{-1}$$

EJERCICIOS

1. La relación *divide* definida en $\omega = \{ 0, 1, 2, 3 \ldots \}$ **no** es simétrica. (Se tiene $2 \mid 6$, pero no $6 \mid 2$.)
2. La relación *ama* definida en el conjunto { Romeo, Julieta } es simétrica.
3. La relación *ama* definida en la humanidad, desgraciadamente no es simétrica.
4. La relación $\leqslant$ definida en el conjunto ω de los números naturales no es simétrica.
5. La relación *...tiene por hermana a...* definida en un conjunto de mujeres es simétrica.

   La relación *...tiene por hermana a...* definida en un conjunto de varones y mujeres no es simétrica en general.
6. Los gráficos 5, 6, 9, 21, 24, 28, definen relaciones simétricas.
7. La relación $\parallel$ definida en $\mathfrak{P}$ es simétrica.

8. Sea E un conjunto de mujeres y varones.
   Nos advierten que la relación *...tiene por hermana a...* definida en ese conjunto E es simétrica.
   ¿Qué se puede afirmar de los varones que pertenecen a E?

9. La relación $\perp$ definida en $\mathfrak{D}$ es simétrica.

10. La relación *...tiene por hermano o por hermana a...*, definida en un conjunto de varones y mujeres es siempre simétrica.

11. La relación *...es disjunto con...* definida en un conjunto $\mathfrak{E}$ de conjuntos es simétrica.

12. Para toda relación R, la relación $R \cup R^{-1}$ es simétrica.

13. Si H es la relación *...tiene por hermana a...* en un conjunto de varones y mujeres, ¿cuál es la relación $H \cup H^{-1}$?

14. Si una relación R está dada por su gráfico, ¿cómo obtener una relación simétrica S trazando el menor número posible de nuevas flechas?

15. Si una relación R está definida por su gráfico, ¿cómo obtener una relación simétrica T suprimiendo el menor número posible de flechas?

16. Éste no es el gráfico de una relación simétrica. ¿Por qué?

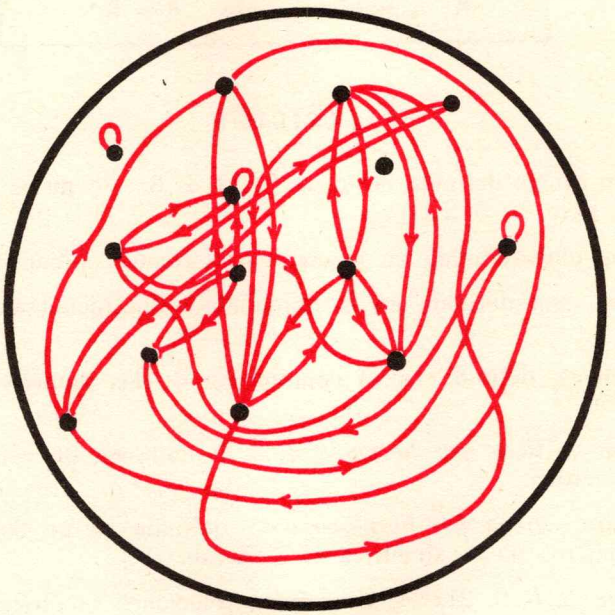


GRÁFICO 45

5 — ANTISIMETRÍA

DEFINICIÓN — Una relación es ***antisimétrica*** *ssi su gráfico no presenta* ***jamás simultáneamente*** *una flecha que vaya de* ***a*** *a* ***b*** $\neq$ ***a*** *y una flecha que vaya de* ***b*** *a* ***a***.

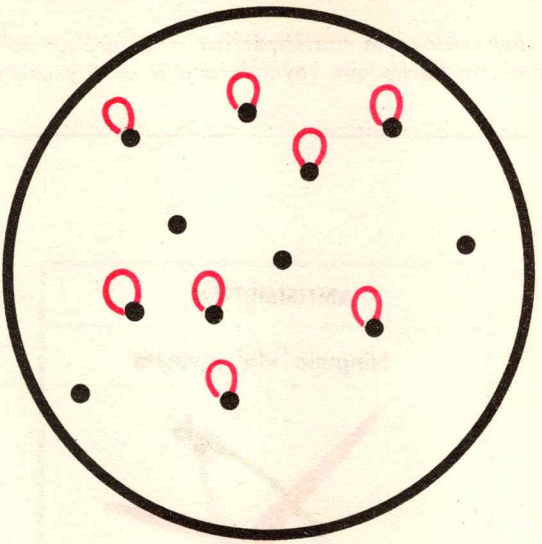
EJERCICIOS

1. Los gráficos 4, 7, 10, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 29, 34, 35, 36, 40, definen relaciones **antisimétricas.**

2. Los gráficos 1, 2, 3, 8, 15, 19, 27, 30, 44, 45, definen relaciones que no son **ni simétricas ni antisimétricas.**

3. Los gráficos 21, 24 representan relaciones a la vez **simétricas** y **antisimétricas.**

4. Una relación es **a la vez simétrica** y **antisimétrica** ssi su gráfico presenta **solamente lazos.**



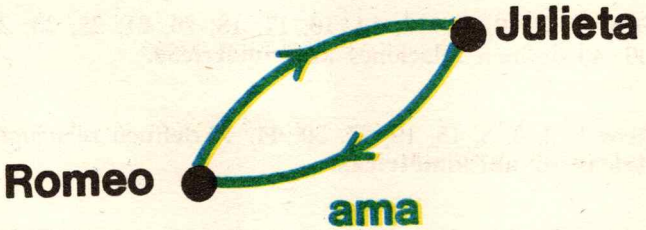
RELACION **R** A LA VEZ *SIMETRICA* Y *ANTISIMÉTRICA*

GRÁFICO 46

5. Las relaciones $\subset$, $\supset$, $\leqslant$, $\geqslant$, $<$, $>$ son antisimétricas.

6. La relación $|$ (*divide*) definida en el conjunto $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ es antisimétrica.

7. La relación *ama* **no** es antisimétrica.
En efecto,



¿Es seguro que Romeo y Julieta deban ser adornados con lazos?

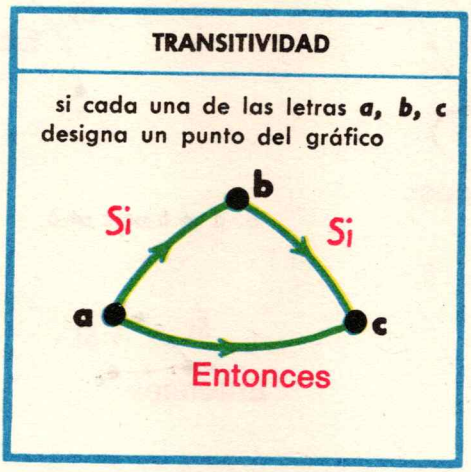
6 — TRANSITIVIDAD

DEFINICIÓN — *Una relación es* ***transitiva***
ssi
su gráfico satisface la condición

Si { *Una flecha va de* ***a*** *a* ***b*** / *y* / *Una flecha va de* ***b*** *a* ***c*** } **entonces** *una flecha va de* ***a*** *a* ***c***,

y esto, cualesquiera que sean los puntos ***a***, ***b***, ***c***, *diferentes o no.*

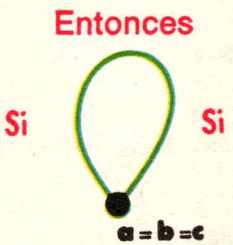
He aquí el blasón de la **Transitividad:**



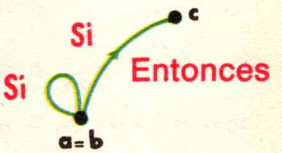
Subrayemos que los objetos representados por *a*, *b*, *c* no son necesariamente diferentes.

Veamos qué da este blasón en las distintas situaciones.

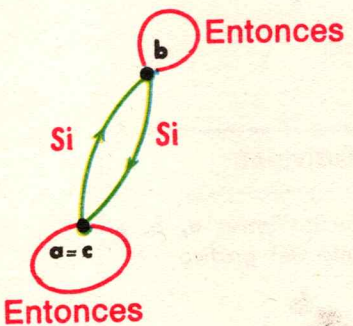
1. $a = b = c$



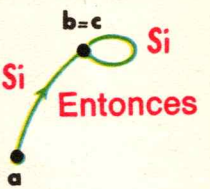
2. $a = b \neq c$



3. $a = c \neq b$



4. $b = c \neq a$

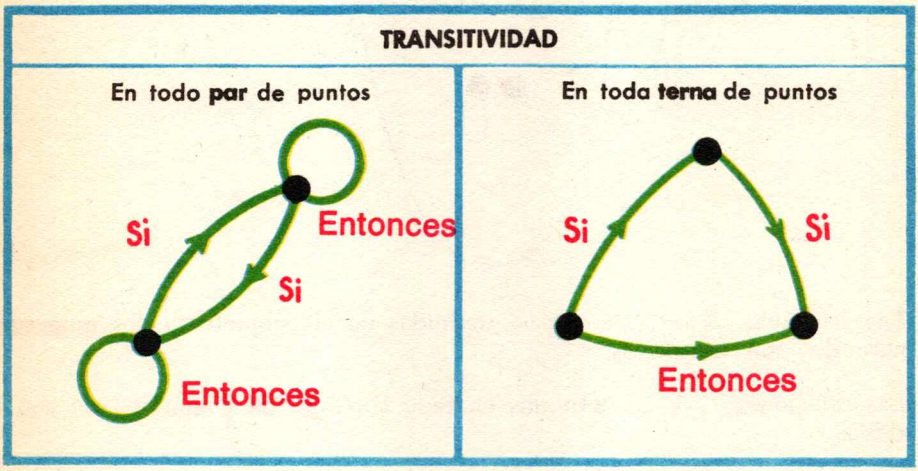


5. $a \neq b \neq c \neq a$

Hemos dibujado en rojo las flechas nuevas que **deben aparecer** en el gráfico debido a la o las flechas verdes que figuran en él.

Se ve que solo los casos 3 y 5 imponen la existencia de una flecha (o de un lazo) nuevo.

Se puede, entonces, representar también la transitividad por el blasón siguiente (en el cual, esta vez, los puntos representan objetos diferentes).



EJERCICIOS

1. Las relaciones definidas por los gráficos 4, 5, 6, 12, 13, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 32, 33, 34, 35, 41, 46, son transitivas.
2. Las relaciones definidas por los gráficos 1, 2, 3, 8, 9, 10, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 30, 36, 40, 44, 45, no son transitivas.
3. El gráfico siguiente define una relación no transitiva.

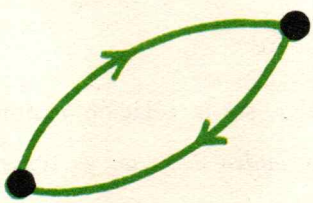


GRÁFICO 47

4. Este gráfico define una relación transitiva.

GRÁFICO 48

5. Las relaciones $\leqslant$, $<$, $\geqslant$, $>$, $=$ definidas en el conjunto de los números naturales son transitivas.

6. Las relaciones $\subset$ y $\supset$ definidas en todo conjunto de conjuntos son transitivas.

7. La relación $|$ definida en el conjunto $\omega = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$ es transitiva.

8. La relación *ama* no es en general transitiva. Para convencerse, tomar el conjunto formado por una mujer, su marido y su suegra.
A menudo se tiene el gráfico que vemos aquí:

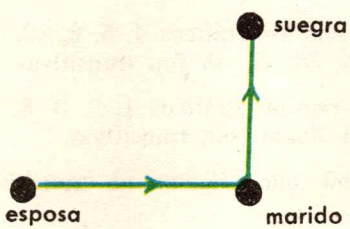


GRÁFICO 49

9. La relación R es transitiva ssi la relación recíproca R^{-1} es transitiva.

10. La relación *...tiene por padre a...* no es transitiva.

11. La relación *...tiene por hermana a...* definida en la humanidad no es transitiva.

12. Los gráficos 50 y 51 ¿representan relaciones transitivas? ¿Por qué?

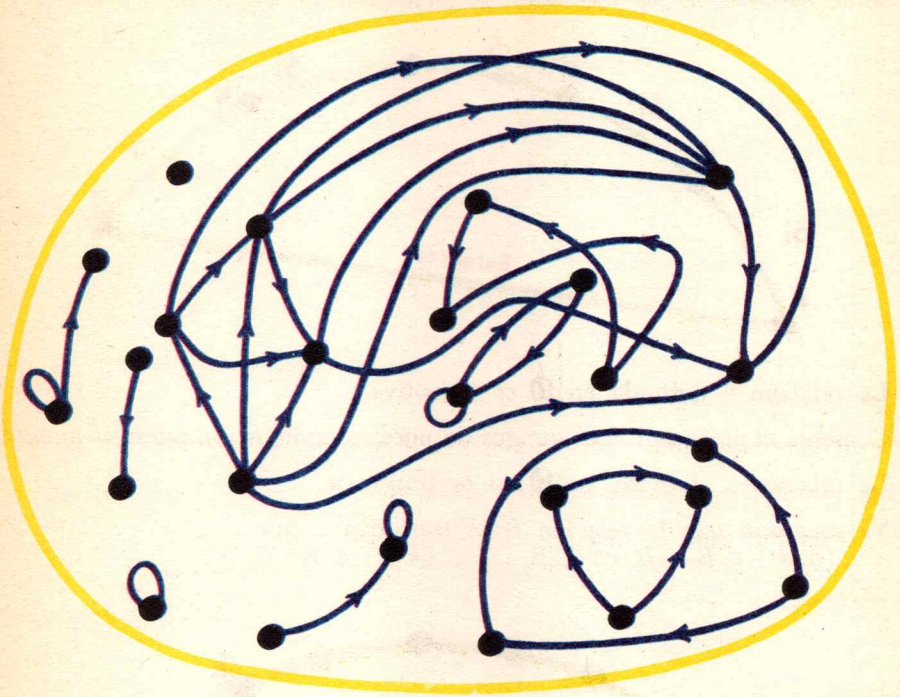


GRÁFICO 50

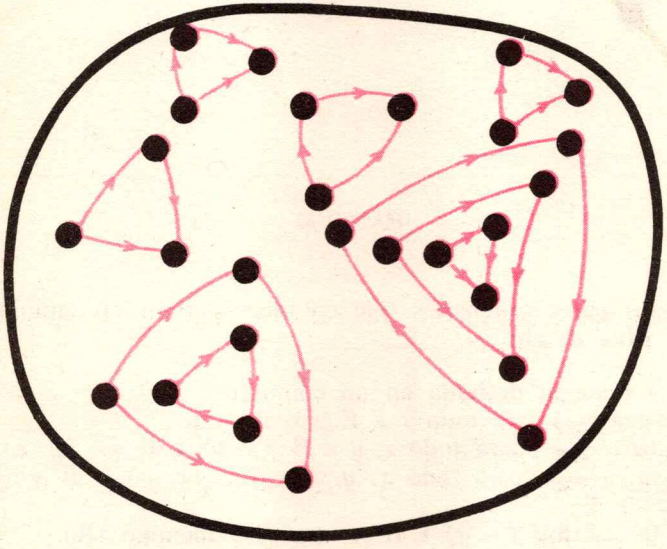
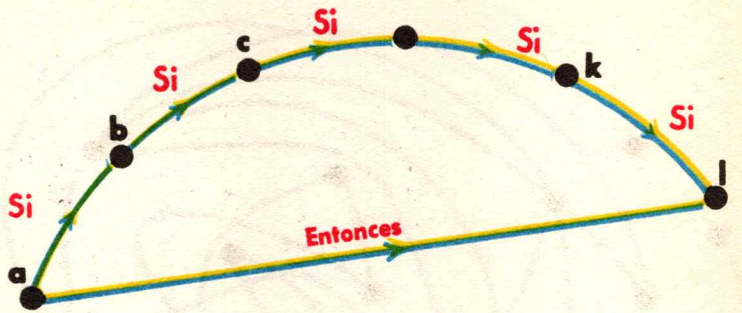


GRÁFICO 51

13. Si R es una relación transitiva y si los pares ordenados (a, b), (b, c), ..., (k, l) pertenecen a R, se tiene también $(a, l) \in R$.



14. La relación $\parallel$ definida en $\mathfrak{D}$ es transitiva.

15. Comenta el aforismo: "Los amigos de nuestros amigos son nuestros amigos".

16. La relación $\perp$ definida en $\mathfrak{D}$ no es transitiva.

17. Te aseguran que la relación R es transitiva y que $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$, ..., $(k\ l) \in R$.

GRÁFICO 52

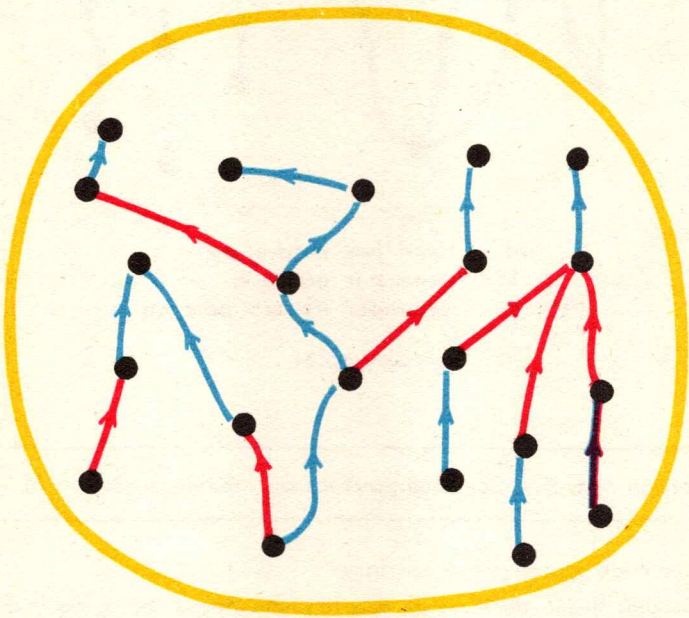
Enumera los pares ordenados que entonces pertenecen también a la relación R. Haz el gráfico.

18. Sea R una relación definida en un conjunto E.
R es reflexiva $\Longleftrightarrow$ para todo $x \in E : (x, x) \in R$.
R es simétrica $\Longleftrightarrow$ (para todo $x, y \in E : (x, y) \in R \Longleftrightarrow (y, x) \in R$).
R es transitiva $\Longleftrightarrow$ (para todo $x, y, z \in E$: $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$ $\Longleftrightarrow (x, z) \in R$).
En lugar de escribir $(x, y) \in R$ se escribe a menudo xRy.
Vuelve a formular estas tres definiciones usando la última notación.

9

Composición de relaciones

1 — LOS ABUELOS

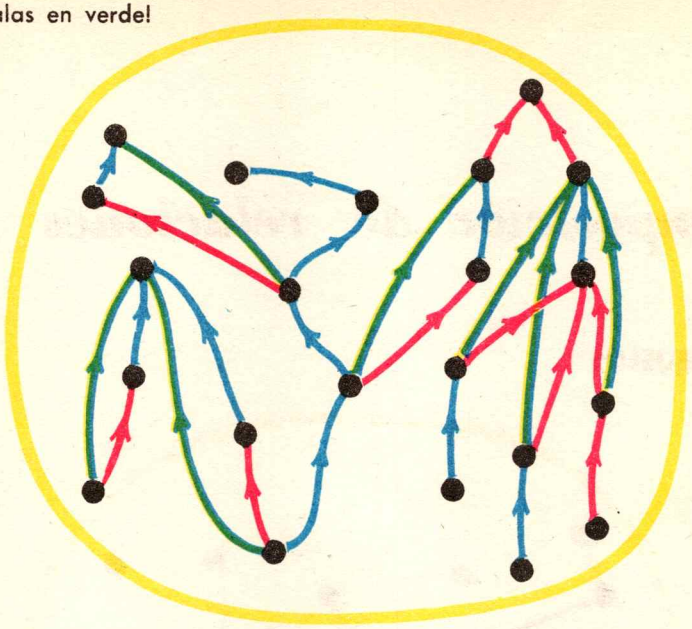


M : ***tiene por madre a***
P : ***tiene por padre a***

GRÁFICO 53

¿Qué flechas de la relación **M o P**: *tiene por abuela paterna a*, puedes trazar?

¡Dibújalas en verde!



M : *tiene por madre a*
P : *tiene por padre a*
M o P : *tiene por abuela paterna a*

GRÁFICO 54

La relación M o P se llama ***compuesta*** *de las relaciones P y M.*

La manera de trazar M o P es clara:

Cuando una flecha de P va de a a b y una flecha de M, de b a c, una flecha de M o P va de a a c.

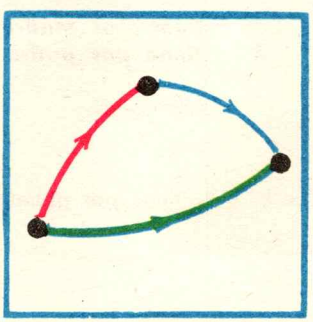


GRÁFICO 55

¿Cuál es la relación **P o M**?

Es la relación

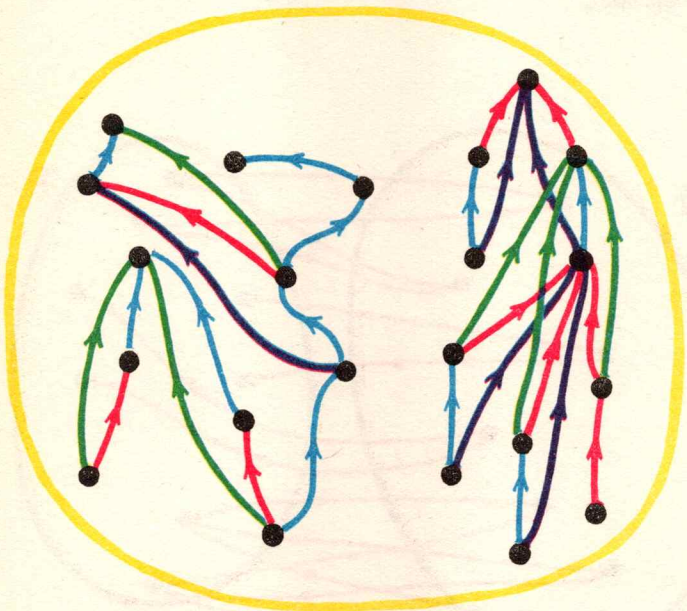
. . . tiene por abuelo materno a . . .

¡Tu abuelo materno no es tu abuela paterna!

Verificar en el esquema que

$$P \circ M \neq M \circ P$$

La composición de las relaciones M y P no es conmutativa.



M : *tiene por madre a*
P : *tiene por padre a*
M o P : *tiene por abuela paterna a*
P o M : *tiene por abuelo materno a*

GRÁFICO 56

¡Compongamos una relación consigo misma!

$P \circ P =$ (*. . . tiene por abuelo paterno a . . .*)
$M \circ M =$ (*. . . tiene por abuela materna a . . .*)

Se escribe a menudo P^2 en lugar de P o P y se dice que P^2 es el *cuadrado de P*. Así, un abuelo paterno ¡resulta ser un **papá cuadrado**!

Traza las relaciones P^2 y M^2.

¿Qué puede representar P^3?

2 — NIÑOS Y PADRES

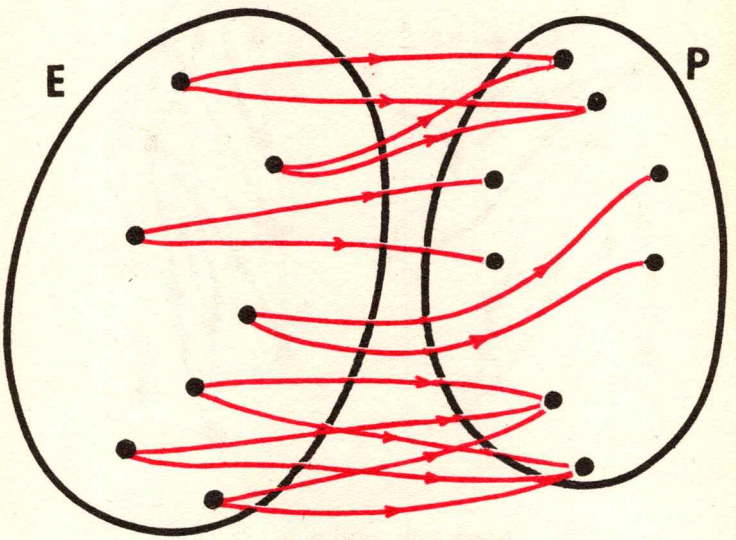
Sea E un conjunto de siete niños y P el conjunto de sus padres (padres y madres).

Se designa por **A** la relación

... tiene por padre o por madre a ...

Dibuja un gráfico para esta situación.

Sea, por ejemplo,



A : ... *tiene por padre o por madre* ... ...

GRÁFICO 57

— ¿Quieres trazar el gráfico de la relación recíproca

A^{-1} : ... *es el padre o la madre de* ...?

— Es muy fácil; basta "dar vuelta las flechas de A".

— Traza el gráfico A^{-1} en azul.

Y traza en seguida un gráfico del compuesto $A^{-1} \circ A$.

— Cada vez que una flecha azul sigue a una roja, dibujo una verde que va del punto de partida de la roja hasta el punto de llegada de la azul.

Así, por ejemplo,

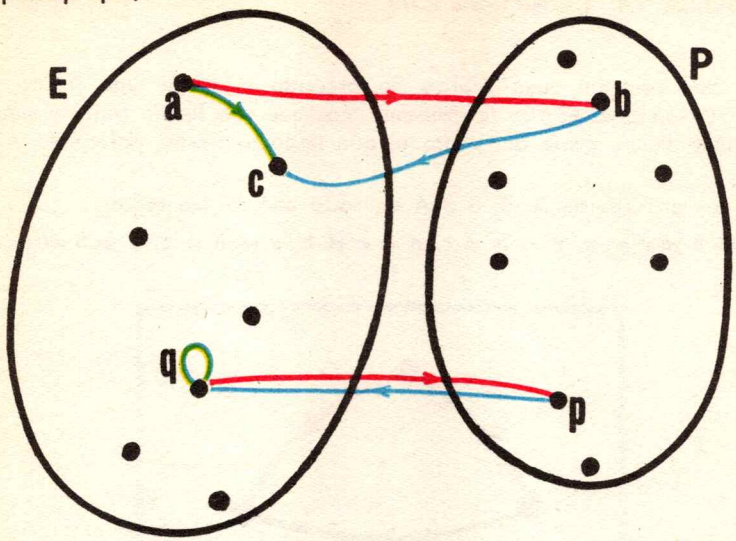


GRÁFICO 58

— Una flecha roja va de *a* a *b*, una azul de *b* a *c*: luego, dibujo una flecha verde de *a* a *c*.

— Una flecha roja va de *q* a *p*, una azul de *p* a *q*: luego, dibujo una verde de *q* a *q*. ¡Es un lazo!

— No olvides que no hay que dibujar más de una flecha de un punto *x* a un punto *y*.

— Aquí tienes el gráfico final pedido.

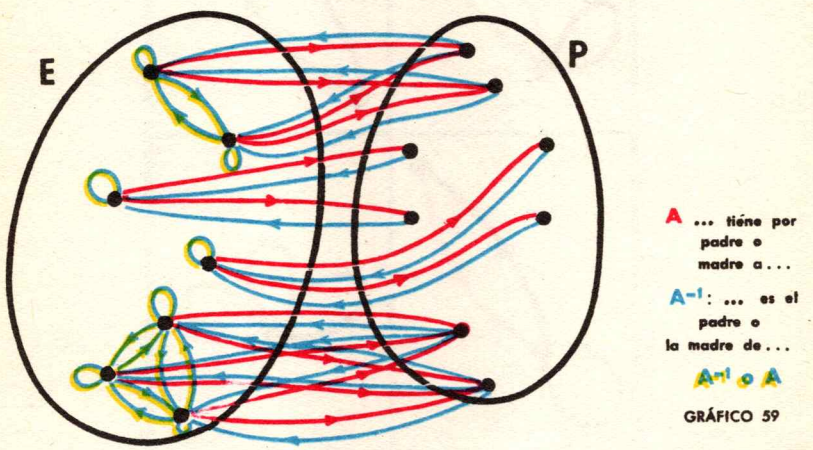


GRÁFICO 59

— ¿Cómo expresar la relación A^{-1} o A?

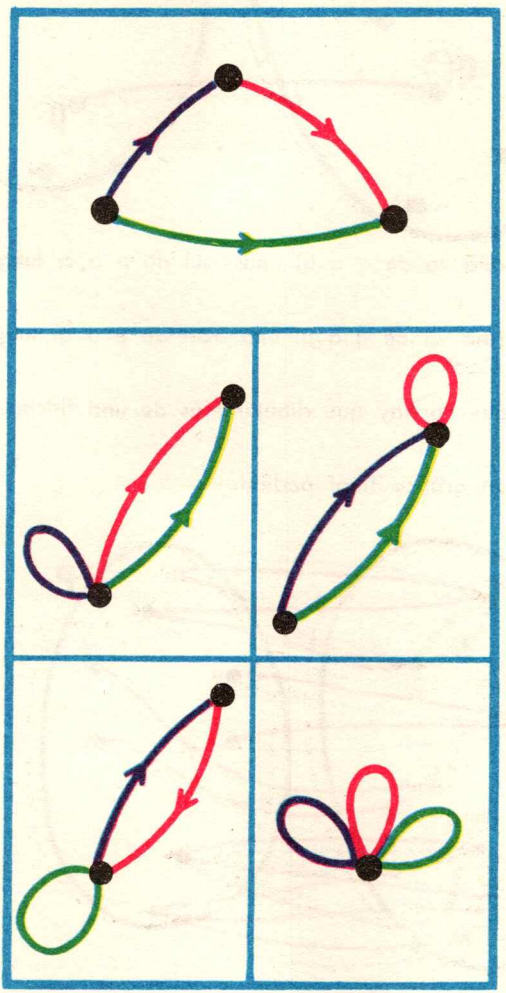
— A^{-1} o A: ... *tiene los mismos padres que* ...

3 — LA TABLA DE COMPOSICIÓN

Sea A una relación cuyo gráfico no presenta más que una flecha (violeta). Sea B una relación cuyo gráfico no presenta más que una flecha (roja) y supongamos que esta última flecha parte del punto al que llega la flecha violeta de A.

Dibuja los gráficos de A, B, B o A en cada uno de los casos:

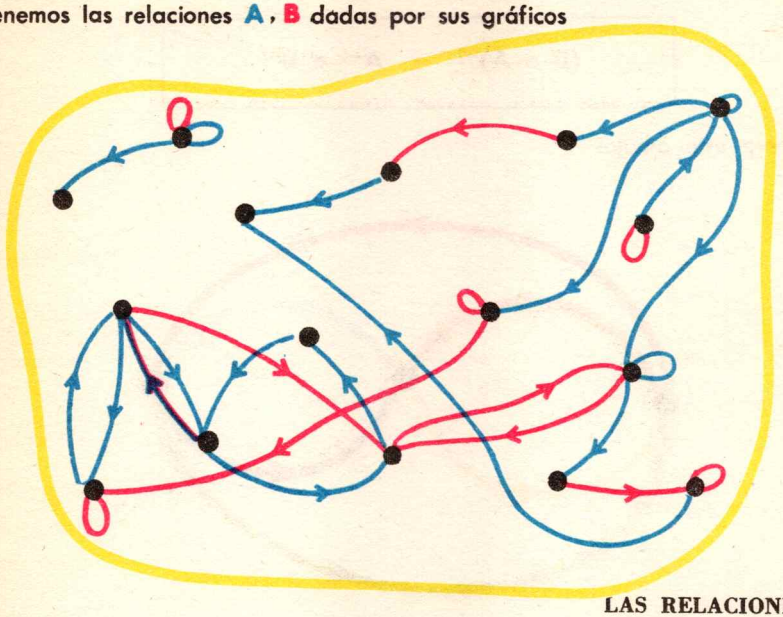
$a \neq b \neq c \neq a$, $a = b \neq c$, $a = c \neq b$, $a \neq b = c$, $a = b = c$.



A, B, B o A

4 — COMPOSICIÓN DE RELACIONES CUALESQUIERA

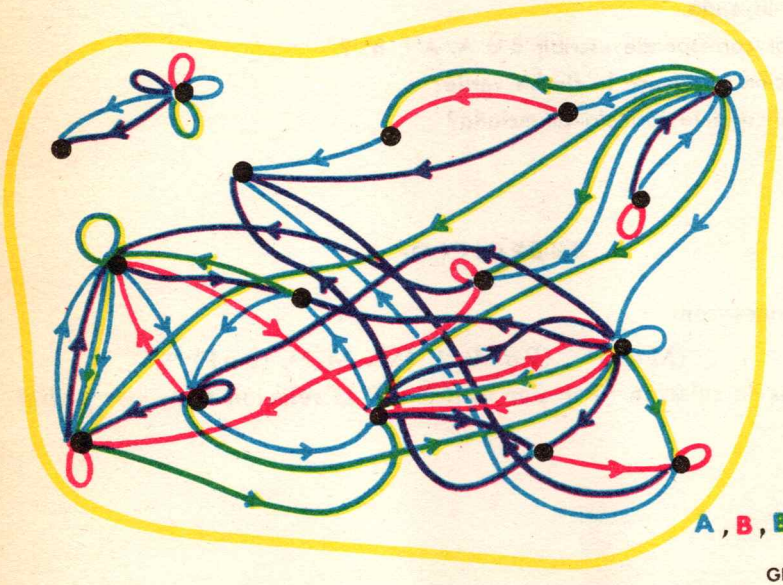
Tenemos las relaciones **A**, **B** dadas por sus gráficos



LAS RELACIONES **A** **B**

GRÁFICO 60

¿Quieres dibujar un gráfico de B o A, de A o B, de $A^2 = A$ o A, de $B^2 = B$ o B?



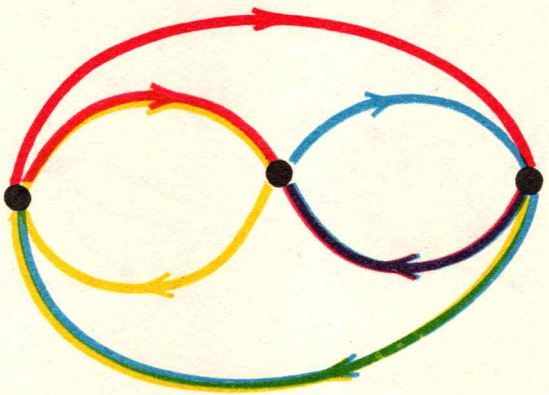
A, **B**, **B o A**, **A o B**

GRÁFICO 61

5 — SI A y B SON RELACIONES, SE TIENE LA FÓRMULA

$$(B \circ A)^{-1} = A^{-1} \circ B^{-1}$$

Observa este dibujo:



A B

Completa la leyenda.

¿En qué color corresponde escribir B o A, A^{-1}, B^{-1}?

¿A qué relación pertenece la flecha verde?

¿Queda justificada la fórmula anunciada?

EJERCICIO

¿Qué relaciones son

$$(M \circ P)^{-1},\ (P \circ M)^{-1},\ (M \circ M)^{-1},\ (P \circ P)^{-1}$$

si M designa la relación *tiene por madre* y P la relación *tiene por padre*?

6 — LA COMPOSICIÓN DE RELACIONES ES ASOCIATIVA

Designemos de nuevo por P la relación ... *tiene por padre a* ... y por M la relación ... *tiene por madre a* ...

Diremos más simplemente que P es la relación ***padre*** y M la relación ***madre***.

La relación P o M es, entonces, la relación ***abuelo materno***, mientras que M o P es la relación ***abuela paterna***.

La compuesta M o (P o M) es la relación

madre del abuelo materno,

mientras que la compuesta (M o P) o M es la relación

abuela paterna de la madre.

Como la madre del abuelo materno es la abuela paterna de la madre, se tiene a M o (P o M) = (M o P) o M.

EJERCICIO

Expresa brevemente, como en los ejemplos anteriores, las relaciones:

(P o P) o P	,	P o (P o P)
(M o M) o M	,	M o (M o M)
(P o P) o M	,	P o (P o M)
(M o P) o P	,	M o (P o P)
(M o M) o P	,	M o (M o P)
P o (M o M)	,	(P o M) o M
P o (M o P)	,	(P o M) o P

Entre estos términos, ¿cuáles designan una misma relación?

Vamos a mostrar que si cada una de las letras A, B, C designa una relación

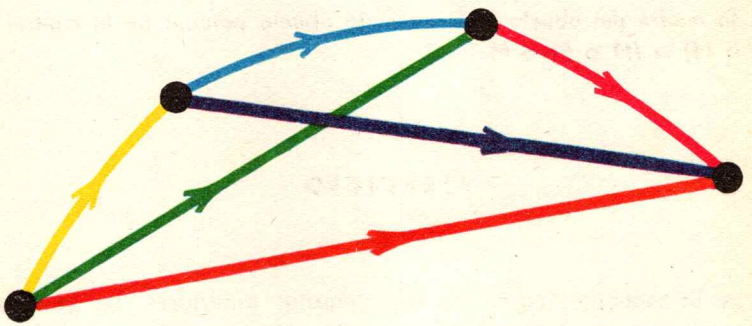
$$C \circ (B \circ A) = (C \circ B) \circ A$$

Esta propiedad se enuncia:

La composición es asociativa.

Para justificar esta fórmula, es inútil dibujar un gráfico completo. Vamos a limitarnos a trazar un esquema en el cual se sigan una flecha (amarilla) de A, una flecha (azul) de B y una flecha (roja) de C. Por excepción, los puntos negros designarán objetos diferentes o no.

Representemos en verde la relación B o A y en violeta la relación C o B.



$$C \circ (B \circ A) = (C \circ B) \circ A$$

Para designar la compuesta de tres relaciones podemos, pues, dispensarnos de escribir los paréntesis. En efecto, hay exactamente dos maneras de colocar los paréntesis en la expresión C o B o A y sabemos que en los dos casos los términos obtenidos son iguales.

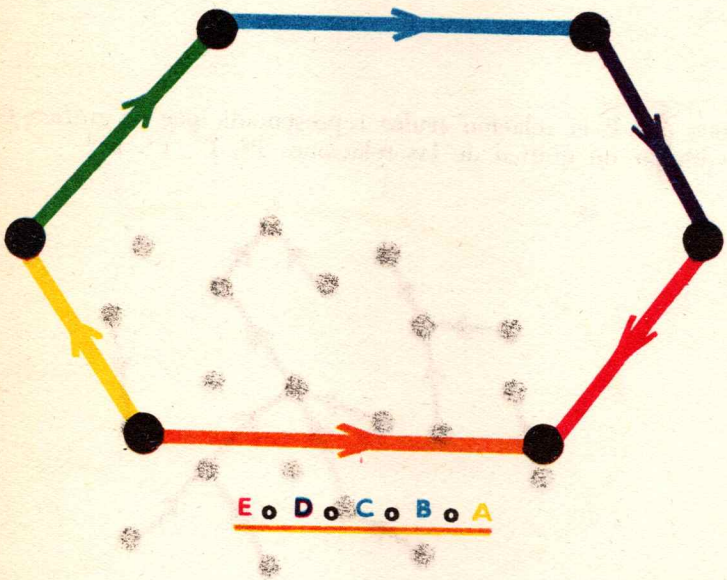
Pondremos, pues,

$$C \circ B \circ A = C \circ (B \circ A) = (C \circ B) \circ A$$

Verifica tú mismo que se tiene también la misma propiedad cuando se componen más de tres relaciones.

La expresión E o D o C o B o A resulta clara porque todas las maneras de colocar los paréntesis conducen al mismo resultado.

Se tiene una flecha de E o D o C o B o A cada vez que una flecha de A, una de B, una de C, una de D, una de E, se siguen como muestra el gráfico.



EJERCICIOS

1. Designa por H la relación *hermana* definida en un conjunto de mujeres y representada por el gráfico 9.
   ¿Quieres dibujar un gráfico de $H^2 = H \circ H$?
   Trata de expresar esta relación.

2. Si F es la relación *hermano* y D la relación *hija*, ¿cuáles son las relaciones $F \circ F$, $D \circ D$, $F \circ D$, $D \circ F$, $(F \circ F) \cup (F \circ D)$?

3. $\parallel$ es una relación definida en el conjunto $\mathfrak{D}$ de las rectas del plano Π. Muestra que $\parallel \circ \parallel = \parallel$.

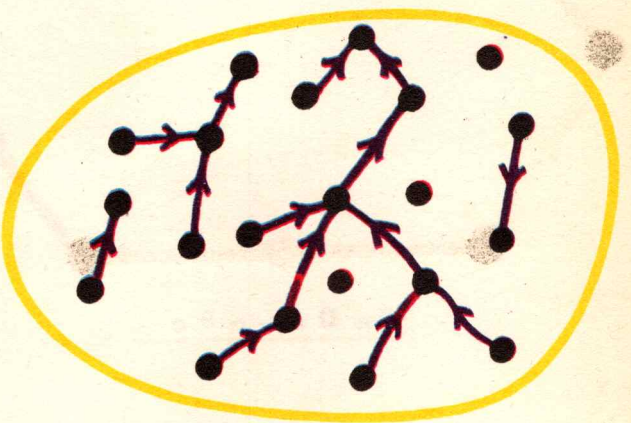
4. ¿Qué es un "papá cubo"?

5. $\perp$ es una relación definida en un conjunto $\mathfrak{D}$.
   Muestra que $\perp^2 = \perp \circ \perp = \parallel$
   $\perp \circ \parallel = \parallel \circ \perp = \perp$

6. Calcula $\perp^3$, $\|^6$, $\perp^{17}$, $\perp^5$, $\perp^{128}$,
$\perp^3 \circ \|^2 \circ \perp^5 \circ \|^6 \circ \perp^7 \circ \|^7$

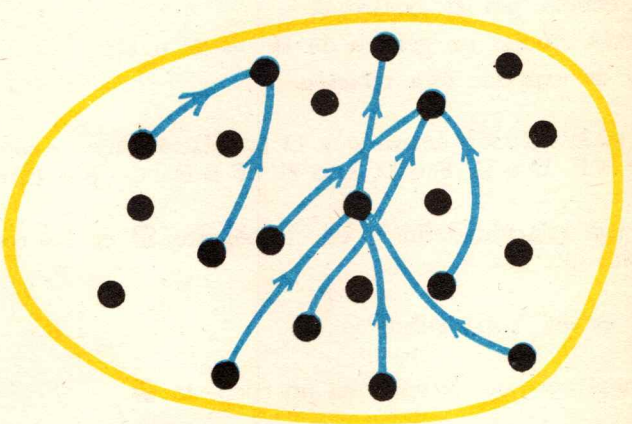
7. ¿Quieres dibujar un gráfico del cuadrado dé la relación | representada por el gráfico 12?
¿Qué observas?
Calcula $|^9$.

8. Designemos por P la relación *padre* representada por el gráfico 62.
¿Quieres dibujar un gráfico de las relaciones P^2, P^3, P^4, P^5?



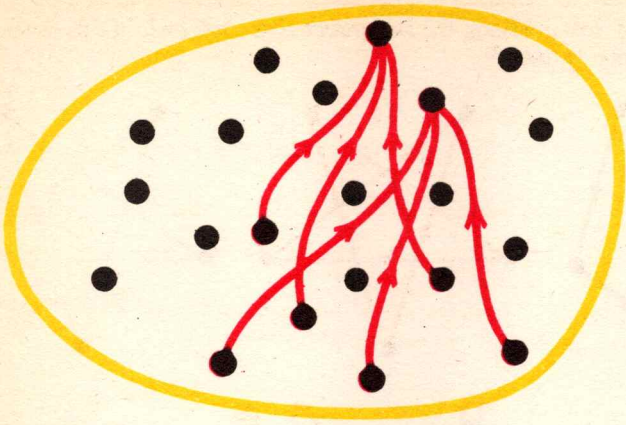
P

GRÁFICO 62



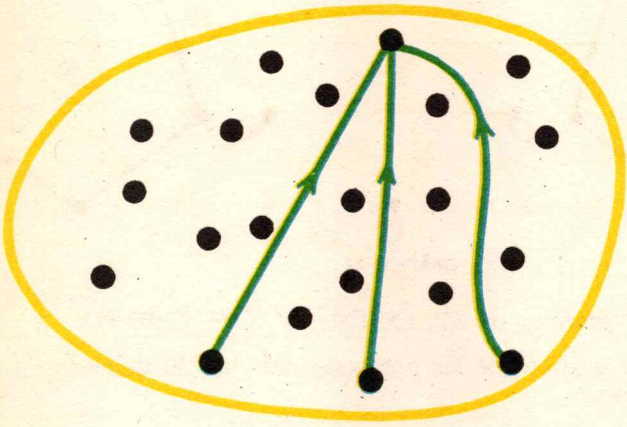
P^2

GRÁFICO 63



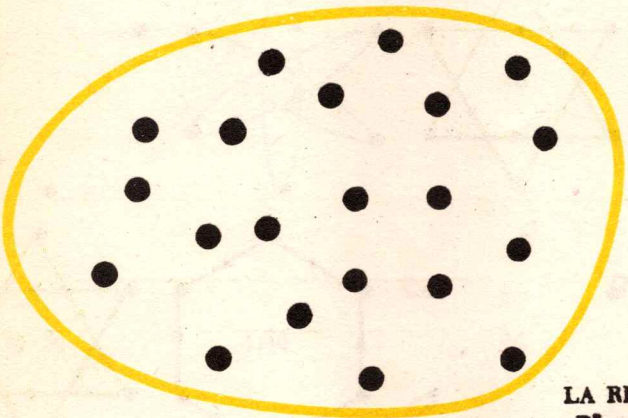
P^3

GRÁFICO 64



P^4

GRÁFICO 65



LA RELACIÓN VACÍA

$P^5 = P^6 = \ldots = \phi$

GRÁFICO 66

9. ¿Quieres dibujar los gráficos de las **potencias** del *ciclo* C definido en un conjunto de cinco puntos?

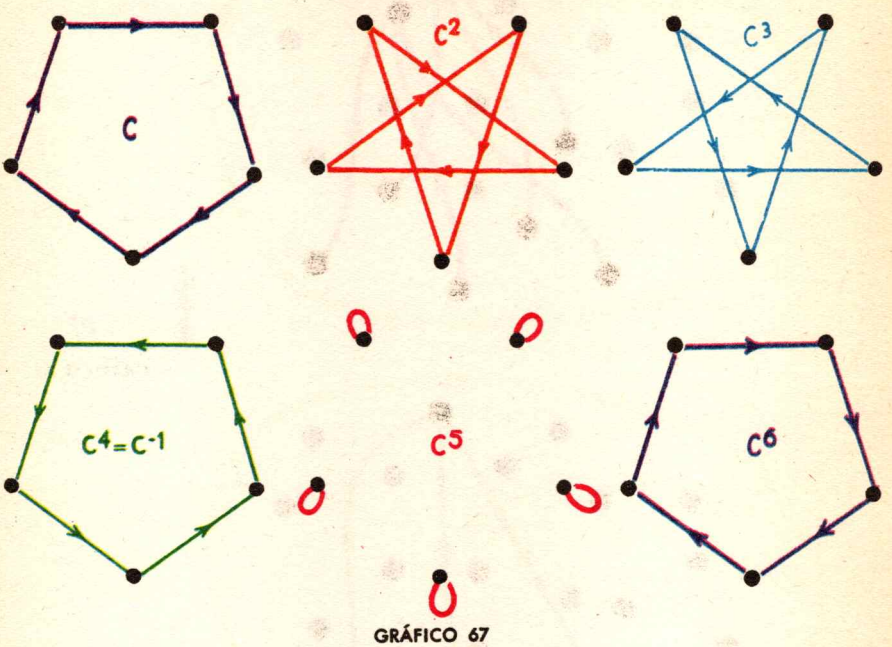


GRÁFICO 67

¿Cuáles son los gráficos de C^7, C^8, C^{17}, C^{19}, C^{100}, $C^{1.000.002}$?

10. ¿Quieres dibujar gráficos de las potencias del *ciclo* D definido en un conjunto de 6 puntos?

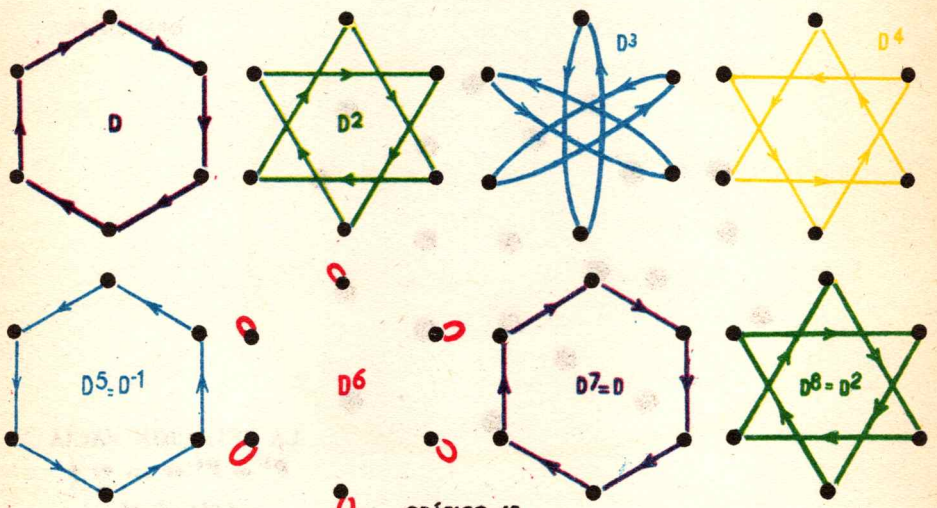


GRÁFICO 68

11. Se designa por H la relación *hermana* y por M la relación *madre*, definidas en el conjunto de los seres humanos vivos o difuntos.
¿Qué relación es H o M?
Se tiene la fórmula M o H $\subset$ M.

12. ¿Por qué no se tiene M o H = M? (¡Haz un dibujo!)

La relación T es transitiva $\iff$ T o T $\subset$ T.

13. ¿De cuántas maneras puedes colocar los paréntesis en la expresión D o C o B o A?

14. Calcula $(M \circ P)^{-1}$, $(M \circ P \circ M)^{-1}$.

15. ¿Qué relación es P^3?
Muestra que $(P^{-1})^3 = (P^3)^{-1}$.
¿No es natural establecer $P^{-3} = (P^{-1})^3 = (P^3)^{-1}$?
Calcula $P^{-3} \circ P^5$, $P^7 \circ P^{-9}$.

10

Equivalencias

1 — CLASIFICAR PARA CONOCER, COMPRENDER, RETENER

Pedro está en silencio; trabaja con su colección de estampillas.

Pequeñas pilas alineadas se van levantando poco a poco.

La tarea ha llegado a su término; ¡las estampillas están clasificadas por país! Así es como Pedro aprende a conocer mejor su querida colección.

Pero no vayan a creer que ésta es la única clasificación que le interesa hacer. Nuestro amigo está lleno de recursos. Ya clasifica sus estampillas por país, ya por color, ya por el valor impreso en ellas o ya por tía . . .,pues las tías de Pedro son las únicas proveedoras de la naciente colección.

Pedro es particularmente sensible a la belleza y, muy seguro de sí, clasifica también sus estampillas en feas, lindas, muy lindas y superlindas.

Los hombres actúan frente a las situaciones más diversas como Pedro frente a sus estampillas: para conocer, comprender, retener . . ., clasifican.

Clasificamos nuestras palabras en sustantivos, adjetivos, verbos, adverbios, pronombres, conjunciones, interjecciones, preposiciones, artículos.

Clasificamos los animales en vertebrados e invertebrados.

Los equipos de fútbol, por país, en aficionados y profesionales, por divisiones.

Clasificar un conjunto E es **dar una partición P del conjunto E.**
¿Quieres recordarnos la definición de partición?

— *Se llama* **partición** *del conjunto E, todo conjunto* $\mathcal{P}$ *de partes* **no vacías** *de E tal que todo elemento de E pertenece* **a uno, y solo uno,** *conjunto-elemento de* $\mathcal{P}$.
— *Los elementos de* $\mathcal{P}$ *se llaman* **clases de la partición.**

Cuando Pedro distribuye su colección en pequeñas pilas, crea una partición porque

1, ninguna pila es vacía;
2, toda estampilla está en una pila, y
3, en una sola.

Estas particiones provienen casi siempre de relaciones tales como

... es del mismo país que ...

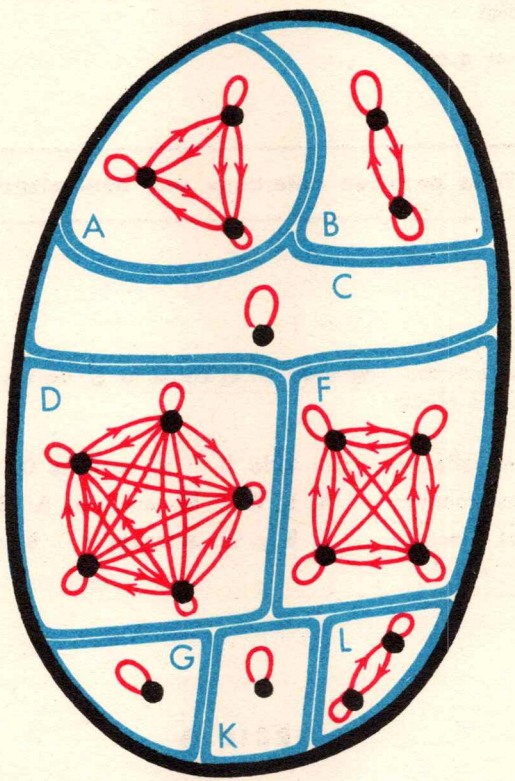
... es del mismo color que ...

Inversamente, de toda partición $\mathcal{P}$ surge una relación:

... pertenece a la misma clase de $\mathcal{P}$ *que ...*

— Efectúa una partición $\mathcal{P}$ de un conjunto de 19 objetos en 8 clases. Traza un diagrama de la partición $\mathcal{P}$ y un gráfico de la relación

... pertenece a la misma clase de $\mathcal{P}$ *que ...*



LA PARTICIÓN $\mathcal{P} = \{ A, B, C, D, F, G, K, L \}$ DEL CONJUNTO E
LA RELACIÓN *... es un elemento de la misma clase de* $\mathcal{P}$ *que ...*

GRÁFICO 69

— ¿Qué propiedades reconoces a la relación

. . . es un elemento de la misma clase de $\mathcal{P}$ que . . .?

Esta relación es *reflexiva, transitiva, simétrica.*

DEFINICIÓN — *Toda relación que es a la vez* ***reflexiva, transitiva, simétrica*** *se llama* **EQUIVALENCIA.**

Así, la relación

. . . es un elemento de la misma clase de la partición que . . .

¡es una **equivalencia!**

Acabamos de ver que

Toda partición determina una equivalencia.

EJEMPLO — La relación $\parallel$ definida en el conjunto $\mathfrak{D}$ de las rectas del plano Π es una equivalencia. En efecto:

La relación $\parallel$ es *reflexiva* : para toda $D \in \mathfrak{D}$, se tiene $D \parallel D$.

La relación $\parallel$ es *transitiva* : si $A, B, C \in \mathfrak{D}$, entonces $A \parallel B \parallel \Rightarrow A \parallel C$.

La relación $\parallel$ es *simétrica* : si $A, B \in \mathfrak{D}$, entonces $A \parallel B \iff B \parallel A$.

EJERCICIO

La relación $\perp$ definida en el conjunto $\mathfrak{D}$ de las rectas de Π no es una equivalencia.

(La relación $\perp$ es simétrica, no reflexiva, no transitiva.)

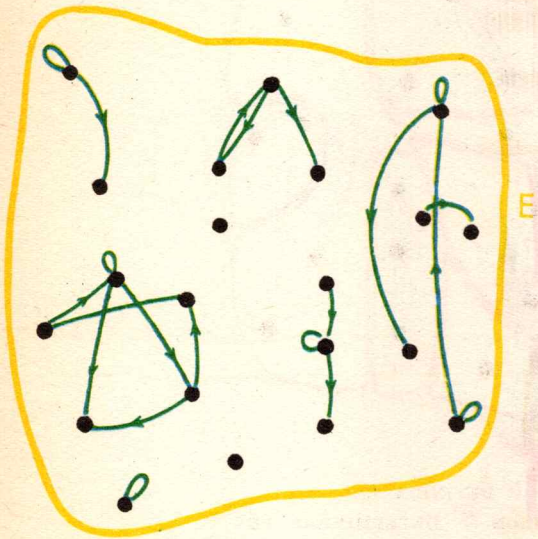
2 — PARTICIÓN DEFINIDA POR UNA RELACIÓN

Sea R una relación definida en un conjunto E.

Piensa en su gráfico.

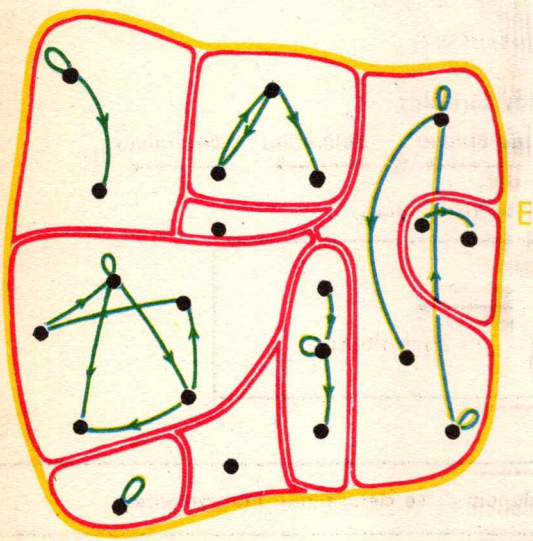
Este hace aparecer una partición de E.

Pondrás dos puntos diferentes de E en una misma clase de la partición ssi están unidos por una línea del gráfico, es decir, ssi se puede ir de uno de estos puntos al otro siguiendo las líneas del gráfico sin prestar atención al sentido de las flechas.



UNA RELACIÓN R
DEFINIDA EN EL CONJUNTO E

GRÁFICO 70



LA RELACIÓN R
DEFINIDA EN EL CONJUNTO E

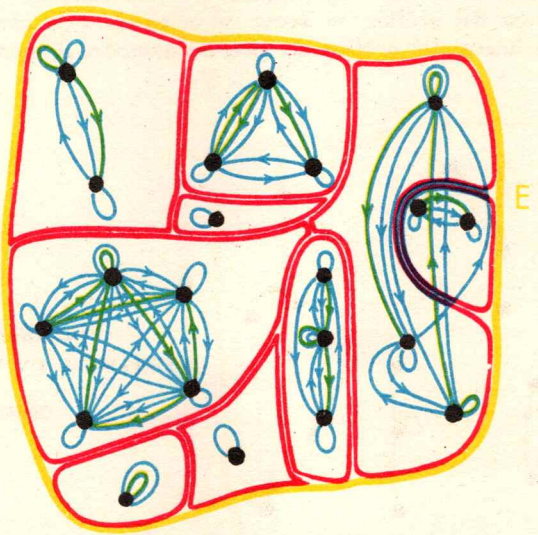
LA PARTICION $\mathcal{P}$
DADA POR R
$R \rightarrow \mathcal{P}$

GRÁFICO 71

En el parágrafo precedente vimos que una partición determina una equivalencia. ¿Podrías trazar las flechas de la equivalencia Q definida por $\mathcal{P}$?

Esta equivalencia se obtiene tomando todos los pares de R y agregando algunos. (Luego R $\subset$ Q.)

Si R hubiera sido una equivalencia no habríamos debido agregar nada (ver gráfico 69).



LA RELACIÓN R DEFINIDA EN E.
LA PARTICIPACIÓN $\mathcal{P}$ DETERMINADA POR R.
LA EQUIVALENCIA Q DETERMINADA POR $\mathcal{P}$
$R \to \mathcal{P} \to Q \to \mathcal{P} \to Q \to \mathcal{P}$

GRÁFICO 72

Resumimos estos resultados en las fórmulas

$$R \xrightarrow{\text{determina}} \mathcal{P} \xrightarrow{\text{determina}} Q \xrightarrow{\text{determina}} \mathcal{P} \xrightarrow{\text{determina}} Q \xrightarrow{\text{determina}} \mathcal{P}$$

En el caso de una equivalencia se tiene, pues,

$$\mathcal{P} \rightleftharpoons Q$$

partición equivalencia

En resumen:

La partición $\mathcal{P}$ y la equivalencia Q se determinan mutuamente.

EJERCICIOS

1. Los gráficos 5, 6, 21, 28, 69 representan equivalencias.

   ¿Por qué?

2. Las relaciones representadas en los gráficos 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 40, 41, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 57, 62, 63, 64, 65, 66, 70, 71 no son equivalencias.

   ¿Por qué?

3. En un conjunto de mujeres la relación *hermana no* es una equivalencia.

   ¿Por qué?

4. La relación de **igualdad** definida en un conjunto E ¡es una equivalencia! Relee los parágrafos 5 y 6 del capítulo 1.

5. Si a y b designan objetos diferentes, se escribe $a \neq b$ (a es diferente de b). La relación $\neq$ es **antirreflexiva, no transitiva, simétrica, no antisimétrica.**
   Esta relación *no* es una equivalencia.
   ¿Por qué?

6. La relación | no es una equivalencia. ¿Por qué?

7. La relación *...tiene los mismos padres que...* es una **equivalencia.**
   Considero números enteros escritos en numeración decimal.

8. Las relaciones *...termina en la misma cifra que...*
   ...tiene la misma suma de cifras que...
   son equivalencias.

9. La partición dada por la relación que define el gráfico 1 tiene dos clases.

10. ¿Cuáles son las particiones dadas por las relaciones definidas por los gráficos 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 36, 44, 45, 46, 48, 51?

11. Vuelve al gráfico 51. Dibuja los diagramas de la partición definida por esta relación. Traza un gráfico de la equivalencia definida por esta partición.

12. En un conjunto de mujeres, la relación *...es clienta de la misma casa de peinados que...* ¿es una equivalencia?

13. Comenta este aforismo: "la relación *ama* no posee ninguna de las propiedades de la equivalencia".

14. ¿Cuál es la partición de $\mathfrak{D}$ definida por la equivalencia $\parallel$?

15. ¿Cuál es la equivalencia definida por la partición *dir* D de Π (D ε $\mathfrak{D}$)?

16. La relación *...corta a...* definida en $\mathfrak{D}$ no es una equivalencia.

17. ¿Cuál es la partición definida por $\perp$ en $\mathfrak{D}$?

18. Sabes que toda relación es origen de una partición que da, a su vez, una equivalencia. Así, toda relación da una equivalencia: es la equivalencia de menos flechas que contiene la relación dada.

19. La relación $\perp$ (definida en el conjunto $\mathfrak{D}$ de las rectas del plano) da la equivalencia $\perp \cup \parallel$. Dicho de otro modo: $\perp \cup \parallel$ es la más pequeña equivalencia que contiene a la relación $\perp$ (definida en el conjunto $\mathfrak{D}$ de las rectas del plano).

11

Órdenes

1 — JERARQUÍAS Y ÓRDENES

Las sociedades están jerarquizadas: cada uno debe obediencia a sus superiores.

Una jerarquía, en una sociedad, define una *relación* en el conjunto de sus individuos.

Veamos cuáles son las propiedades de tales relaciones.

Si *a* debe obedecer a *b*, se trazará una flecha de *a* a *b*.

El soldado obedece al cabo, éste al sargento, el sargento al teniente, etc. . . .

Si el soldado tiene el privilegio de encontrar un teniente, le deberá obediencia.

La relación definida por una jerarquía debe ser **transitiva.**

Resulta bien claro que la presencia de la situación

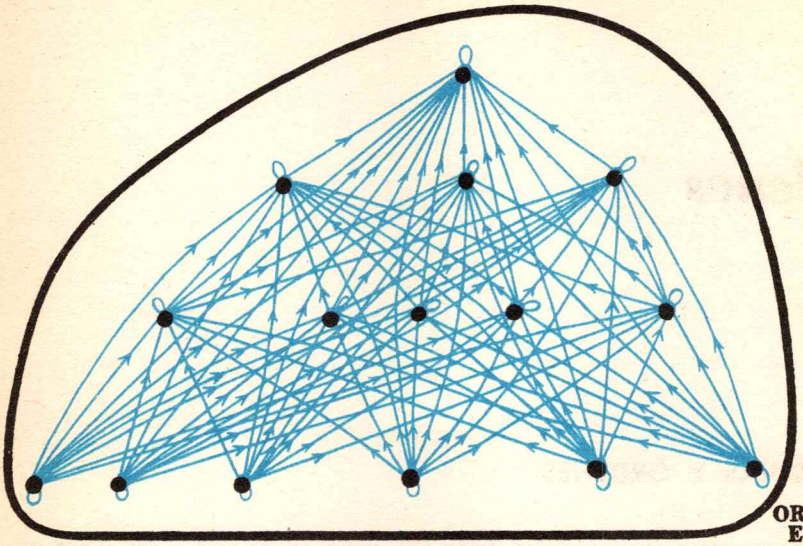
en el gráfico de una jerarquía sería catastrófica.

La relación definida por una jerarquía debe ser **antisimétrica.**

Transitividad y *antisimetría:* tales son las propiedades indispensables de una relación definida por una jerarquía.

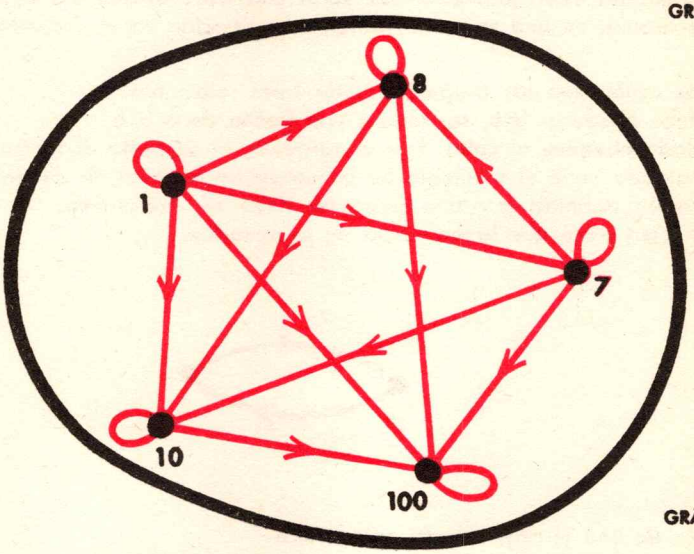
DEFINICIÓN 1 — *Toda relación que es a la vez* ***reflexiva, transitiva, antisimétrica,*** *será llamada* ORDEN.

Así, cada uno tendrá el consuelo de ser obedecido por una persona (al menos): ¡él mismo!



ORDEN EN EL EJÉRCITO

GRÁFICO 73



$\leqslant$

GRÁFICO 74

Los órdenes representados por los gráficos 73 y 74 presentan una diferencia esencial: en el primer caso se pueden encontrar puntos *a*, *b* tales que ninguna flecha va de *a* a *b* ni de *b* a *a*.

En el segundo caso esto no ocurre nunca.

Es lo que se expresa diciendo que el orden $\leqslant$ es **total**.

¡En el ejército el orden no es total!

EJERCICIOS

1. Tenemos aquí algunas flechas del gráfico de un orden. Traza todas las flechas que con seguridad han sido omitidas.

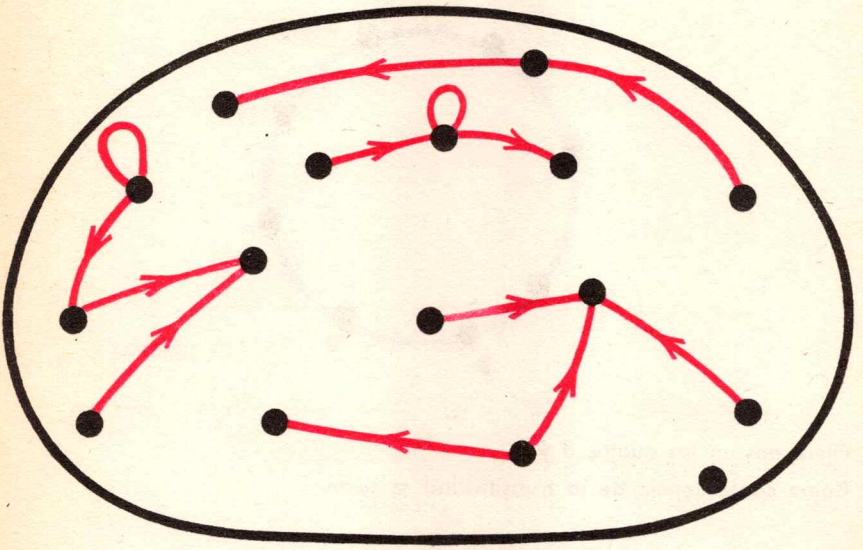


GRÁFICO 75

2. Éste es un gráfico de orden abandonado por los alumnos. ¿Qué piensas de él?

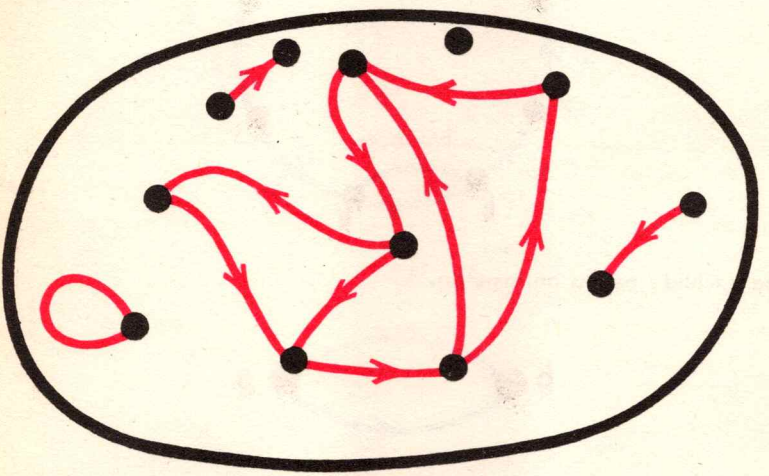


GRÁFICO 76

2 — DOS PROPIEDADES DE LOS ÓRDENES

PROPOSICIÓN 1 — *El gráfico de un orden no contiene ningún ciclo.*
Supongamos que el gráfico del orden R contiene el ciclo.

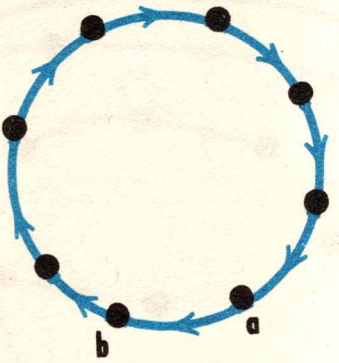


GRÁFICO 77

Fijémonos en los puntos *a* y *b*.
Como consecuencia de la transitividad se tiene

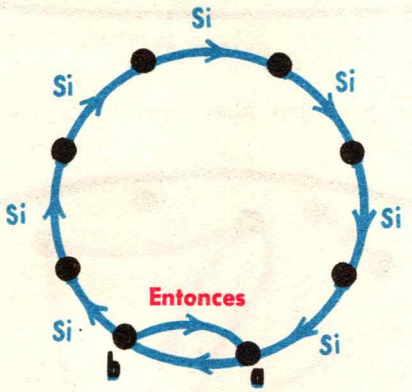
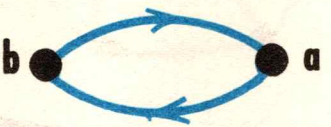


GRÁFICO 78

que queda excluida por la antisimetría.



Así, tendríamos la situación

l. q. q. d.

PROPOSICION 2 — *R es un orden* $\iff$ R^{-1} *es un orden.*

En efecto, sabemos que

R es reflexiva $\iff$ R^{-1} es reflexiva.
R es antisimétrica $\iff$ R^{-1} es antisimétrica.
R es transitiva $\iff$ R^{-1} es transitiva.

EJERCICIOS

1. Indica cuáles son *órdenes* entre las relaciones definidas por los gráficos 1 a 78.
Precisa cuáles son los órdenes totales y los órdenes no totales.

2. La relación | definida en { 0, 1, 2 ... } ¿es un orden?
Este orden ¿es total?

3. La relación | definida en { 0, 1, 2, 12, 6, 168, 84 } ¿es un orden total?

4. La relación definida por el gráfico siguiente es un orden no total.

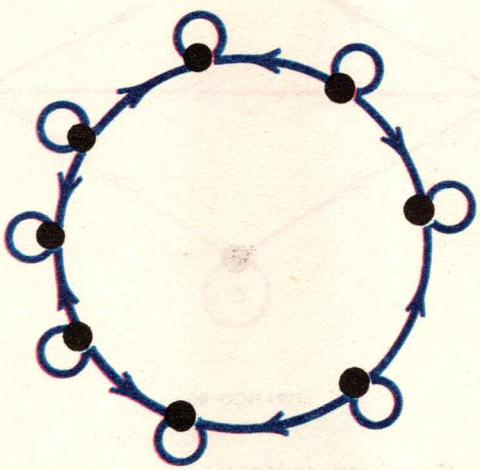
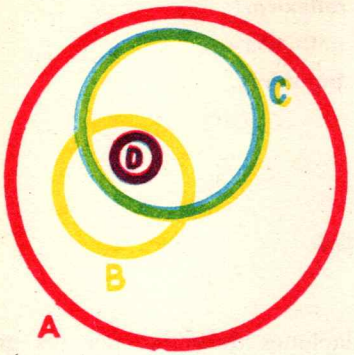


GRÁFICO 79

5. He aquí dos situaciones:

Un conjunto E de conjuntos



En este conjunto E se encuentra definida la relación $\subset$.

Un conjunto E de números naturales.

$A = 24$

$B = 6$

$C = 8$

$D = 2$

En este conjunto E se encuentra definida la relación

Estas dos situaciones dan lugar al mismo gráfico:

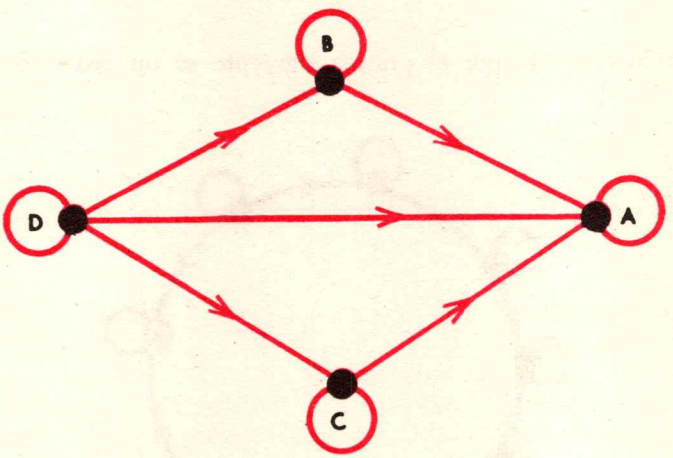
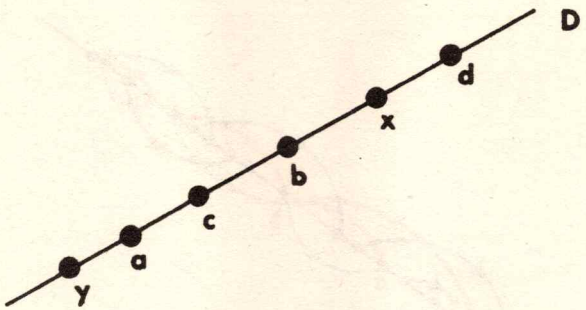


GRÁFICO 80

Las relaciones $\subset$ y | son órdenes.
Ninguna flecha une los puntos B y C del gráfico.
¡Estos órdenes no son totales!

3 — LA RECTA ORIENTADA

— Mira la recta D en la cual hemos marcado los puntos diferentes *a*, *b*, *c*, *d*, *x*, *y*.



Marca por flechas estos pares ordenados de puntos distintos:

(*a*, *b*), (*c*, *d*), (*x*, *y*), (*b*, *a*), (*a*, *x*), (*b*, *c*), (*y*, *d*), (*y*, *x*).

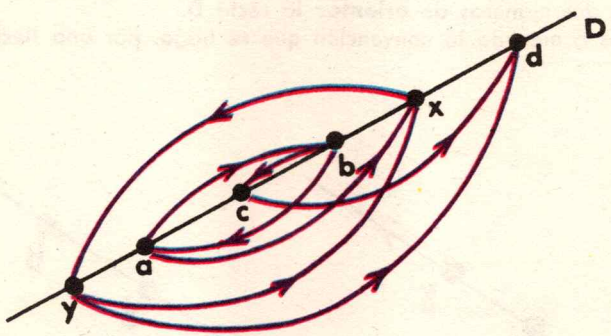


GRÁFICO 81

— Las flechas que representan (*a*, *b*) y (*x*, *y*) ¿tienen el **mismo sentido?**

— ¡No!

— Diremos que los pares ordenados (*a*, *b*) y (*x*, *y*) no tienen el mismo sentido. ¿Quieres enumerar los pares ordenados que tienen el mismo sentido que (*a*, *b*)?

— (*a*, *b*), (*a*, *x*), (*y*, *x*), (*y*, *d*), (*c*, *d*).

— ¡Otros, además, que tengan el mismo sentido que (*a*, *b*)!

— (*y*, *a*), (*y*, *c*), (*y*, *b*), (*a*, *c*), ...

— Enumera los pares ordenados que tienen el mismo sentido que (*b*, *a*).

— (*x*, *y*), (*b*, *c*), (*b*, *a*), (*d*, *x*), (*d*, *b*), (*d*, *c*), ...

— Todo par ordenado tiene el mismo sentido que uno, y solo uno de los pares (a, b) (b, a).

—Dibuja en rojo algunos pares ordenados del mismo sentido que (a, b) y en azul algunos pares ordenados del mismo sentido que (b, a).

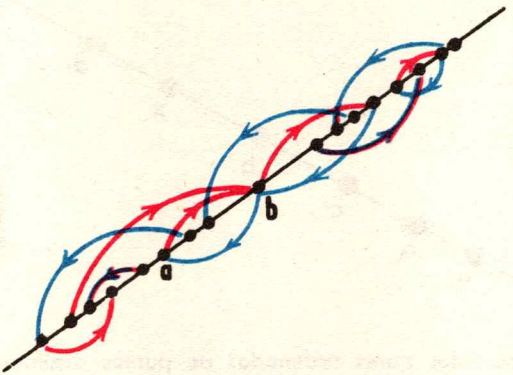
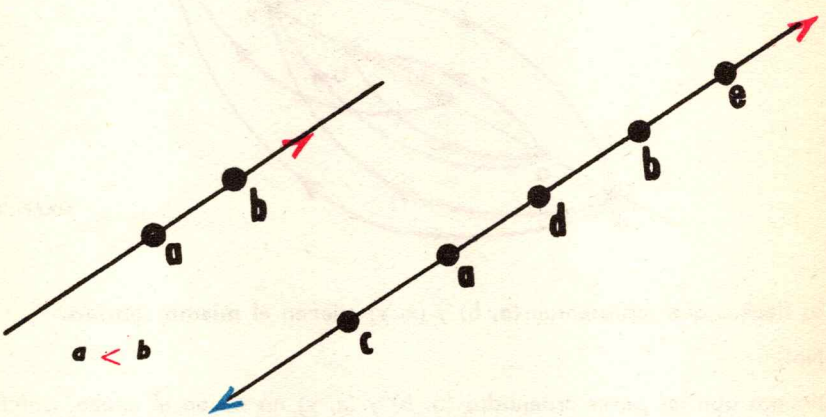


GRÁFICO 82

Hay, pues, dos maneras de **orientar** la recta D.
Indicaremos a menudo la convención que se haga, por una flecha.



LAS DOS ORIENTACIONES DE UNA RECTA

$a < c$	$c < a$
$d < a$ $\quad b < c$	$a < d$ $\quad b > c$
$b < d$ $\quad c > d$	$d < b$ $\quad c < d$
$e < b$ $\quad d > e$	$b < e$ $\quad d < e$
$a > b$	$a < b$

Orientar una recta es llamar **positivo** a uno de los dos sentidos. El otro, *entonces*, es llamado **negativo**.

Se indicará que (a, b) es de sentido **positivo** escribiendo $a < b$.

$$a < b$$

que se lee "a precede a b", o "a está antes de b" o "a es menor que b".

Si cada una de las letras x, y designa un punto de D, se tiene una, y solo una, de las tres posibilidades

$$x < y$$
$$x = y$$
$$y < x$$

Si **no es** $x < y$, será, pues, $x = y$ **o** $y < x$

que se escribirá más brevemente $y \leqslant x$

Recapitulemos estas convenciones

$$y \leqslant x \iff y < x \quad \textbf{o} \quad y = x$$

De donde también

$$y < x \iff y \leqslant x \quad \textbf{y} \quad y \neq x$$

Se escribirá a menudo $x \geqslant y$ en lugar de $y \leqslant x$;
$y\ x > y$ en lugar de $y < x$.

Puedes comprobar que *la relación* $\leqslant$ *definida en D al decidir que* $a < b$ *es un orden total.*

Si hubiéramos fijado que $b < a$, *habríamos obtenido* **el orden recíproco.**

AXIOMA Π 6 — ***Toda recta admite dos órdenes totales recíprocos. Se dice que se orienta una recta fijando que*** $a < b$ ***para dos puntos diferentes.***

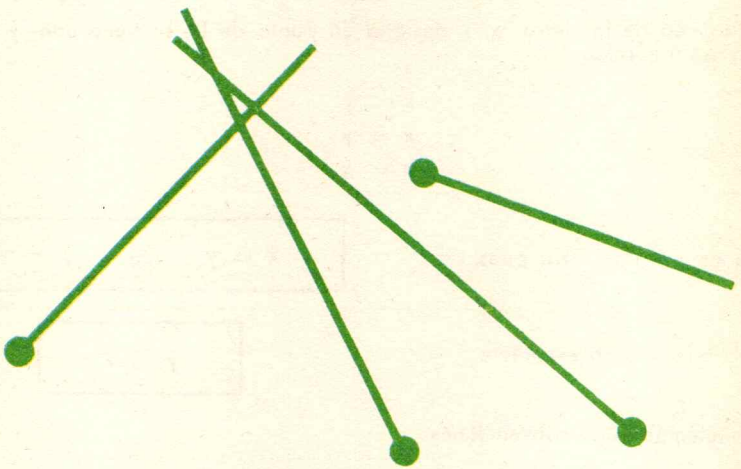
4 — SEMIRRECTAS

Sea p un punto de una recta orientada D.

Se llaman *semirrectas cerradas de origen p*, las partes

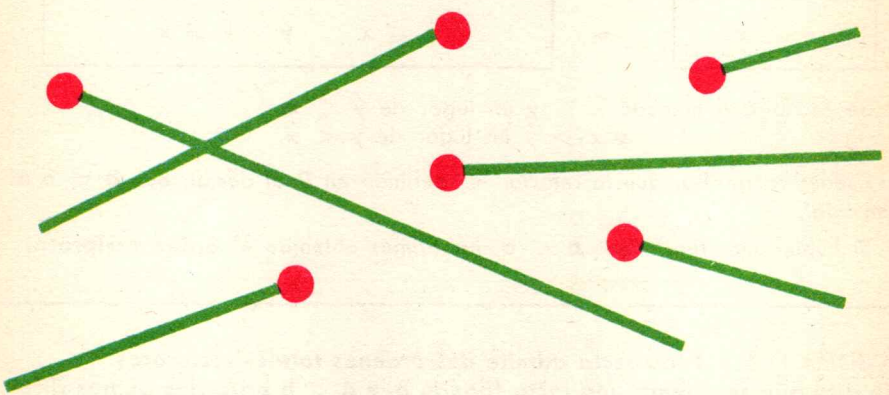
$$D_1 = \{ x \in D \mid x \leqslant p \} \text{ y } D_2 = \{ x \in D \mid x \geqslant p \}$$

De acuerdo con nuestras convenciones, representa algunas semirrectas cerradas.



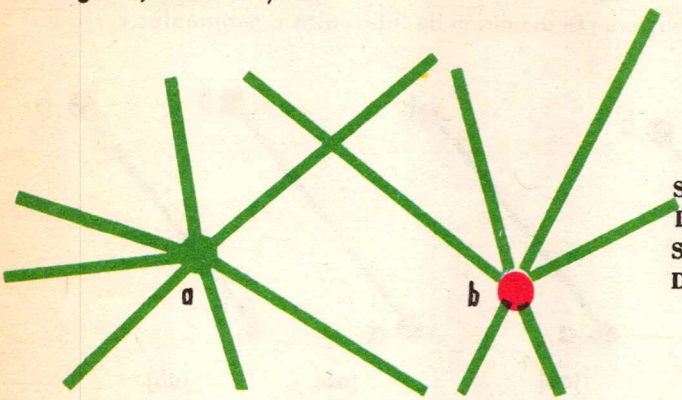
SEMIRRECTAS CERRADAS

El dibujo siguiente sugiere la definición de semirrectas abiertas.



SEMIRRECTAS ABIERTAS

Dibuja algunas semirrectas cerradas de origen a y algunas semirrectas abiertas de origen b, siendo $a \neq b$.



SEMIRRECTAS CERRADAS DE ORIGEN a
SEMIRRECTAS ABIERTAS DE ORIGEN b

— Me doy dos puntos distintos a y b.
¿Quieres definir la semirrecta cerrada de origen a y que contiene a b?

— Oriento la recta ab de manera que $a < b$.
La semirrecta pedida es entonces $\{ x \in ab \mid a \leqslant x \}$.

— Si a y b designan puntos diferentes, la semirrecta cerrada de origen a y que contiene a b tendrá como notación $[ab$ (o también $ba]$).

EJERCICIOS

1. ¿Quieres definir del mismo modo la semirrecta abierta de origen b que contiene a a?

2. Su notación será $ab[$ (o también $]ba$).
Sea D_1 una semirrecta cerrada incluida en $D \in \mathfrak{D}$
Sea D_2 la otra semirrecta cerrada incluida en D y del mismo origen a que D_1.
Sean D_3 y D_4 las semirrectas abiertas de origen a incluidas en D_1 y D_2, respectivamente. Verifica y completa las fórmulas

1. $D_1 \cap D_2 = \{ a \}$
2. $D_1 \cup D_2 = D$
3. $D_3 \cap D_4 = \phi$
4. $D_3 \cup D_4 =$
5. $D_1 \cap D_4 =$
6. $D_1 \cup D_4 =$
7. $\{ D_1, D_4 \}$ es una partición de D.
8. $\{ D_2, D_3 \}$ es una partición de D.
9. $D_3 \subset D_1$
10. $D_4 \subset D_2$
11. $D \setminus D_1 =$
12. $D \setminus D_2 =$
13. $D \setminus D_3 =$
14. $D \setminus D_4 =$

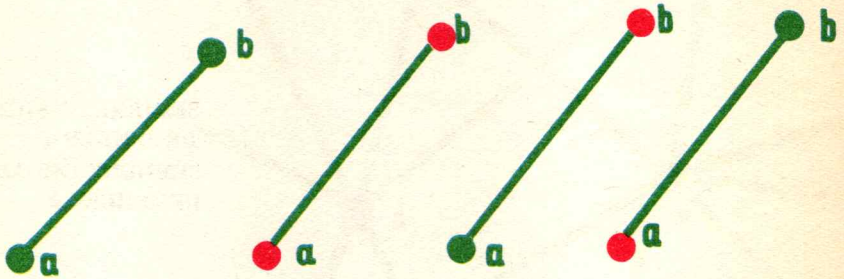
3. El conjunto de las semirrectas cerradas de origen a no es una partición de Π. ¿Por qué?

4. El conjunto de las semirrectas abiertas de origen a no es una partición de Π. ¿Por qué?

5. Sea $a \in \Pi$. El conjunto constituido por $\{ a \}$ y las semirrectas abiertas de origen a es una partición de Π.
¿Por qué?

5 — INTERVALOS O SEGMENTOS

Los dibujos que siguen sugieren la definición de **intervalos o segmentos cerrados, abiertos y semiabiertos.**



$[ab]$ $\quad$ $]ab[$ $\quad$ $[ab[$ $\quad$ $]ab]$

INTERVALO CERRADO INTERVALO ABIERTO INTERVALOS SEMIABIERTOS

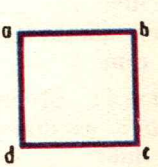
¿Cómo formular la definición de estos intervalos o segmentos?
Comencemos por orientar la recta ab, lo cual se puede hacer de dos maneras.

si $a < b$	si $b < a$
$[a\,b] = \{ x \in ab \mid a \leqslant x \leqslant b \}$	$[a\,b] = \{ x \in ab \mid a \geqslant x \geqslant b \}$
$]a\,b[= \{ x \in ab \mid a < x < b \}$	$]a\,b[= \{ x \in ab \mid a > x > b \}$
$[a\,b[= \{ x \in ab \mid a \leqslant x < b \}$	$[a\,b[= \{ x \in ab \mid a \geqslant x > b \}$
$]a\,b] = \{ x \in ab \mid a < x \leqslant b \}$	$]a\,b] = \{ x \in ab \mid a > x \geqslant b \}$

EJERCICIOS

1. El segmento $[ab]$ es la intersección de la semirrecta cerrada de origen a que contiene a b y de la semirrecta cerrada de origen b que contiene a a. De donde $[ab] = [ab \cap ab]$. Escribe fórmulas análogas para $[ab[$, $]ab]$, $]ab[$.

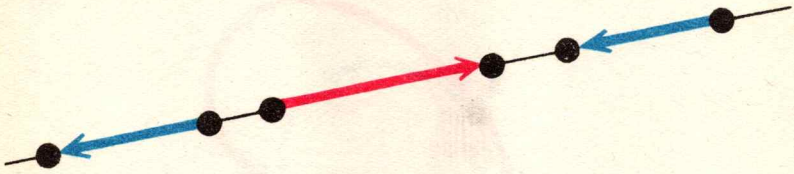
2. Define un segmento paralelo a una recta.
¿Qué conjunto es natural designar por $[aa]$?
Diremos que el segmento cerrado $[aa]$ es paralelo a toda recta.
¿Podrías argumentar a favor de esta definición?



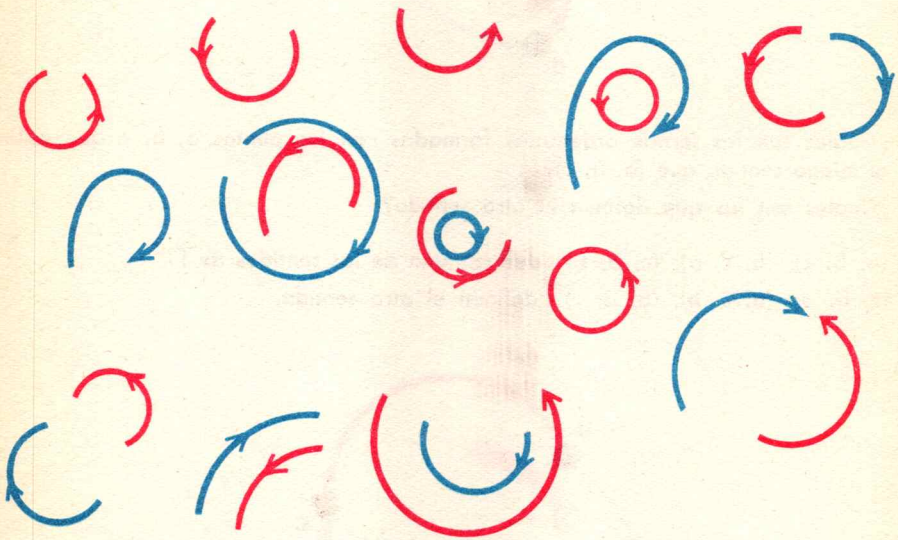
3. $\{ [a\,b[, [b\,c[, [c\,d[, [d\,a[\}$
es una partición del borde del cuadrado.

6 — ORIENTACIÓN DEL PLANO

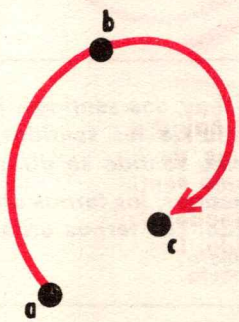
Hemos visto que todo par ordenado de puntos diferentes de una recta define un sentido de esta recta.



— ¿Podrías por medio de flechas indicar dos **sentidos** del plano?

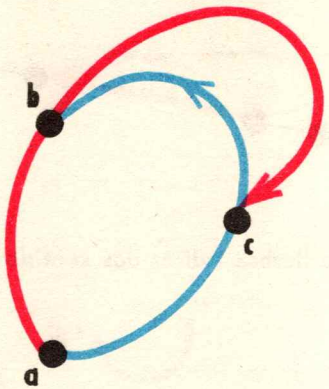


— Tenemos aquí tres puntos *a*, *b*, *c*.
¿Quieres trazar una flecha que pase sucesivamente por *a*, *b*, *c*?



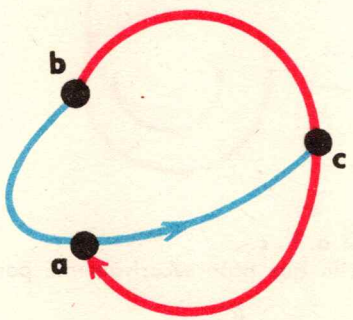
— La **terna** ordenada (a, b, c) define uno de los sentidos del plano.
La terna ordenada (a, c, b) ¿define el mismo sentido?

— ¡No!



— ¿Cuáles son las ternas ordenadas formadas con los puntos a, b, c que definen el mismo sentido que (a, b, c)?
¿Cuáles son las que definen el otro sentido?

— (a, b, c), (b, c, a), (c, a, b) definen uno de los sentidos de Π.
(c, b, a), (a, c, b), (b, a, c) definen el otro sentido.

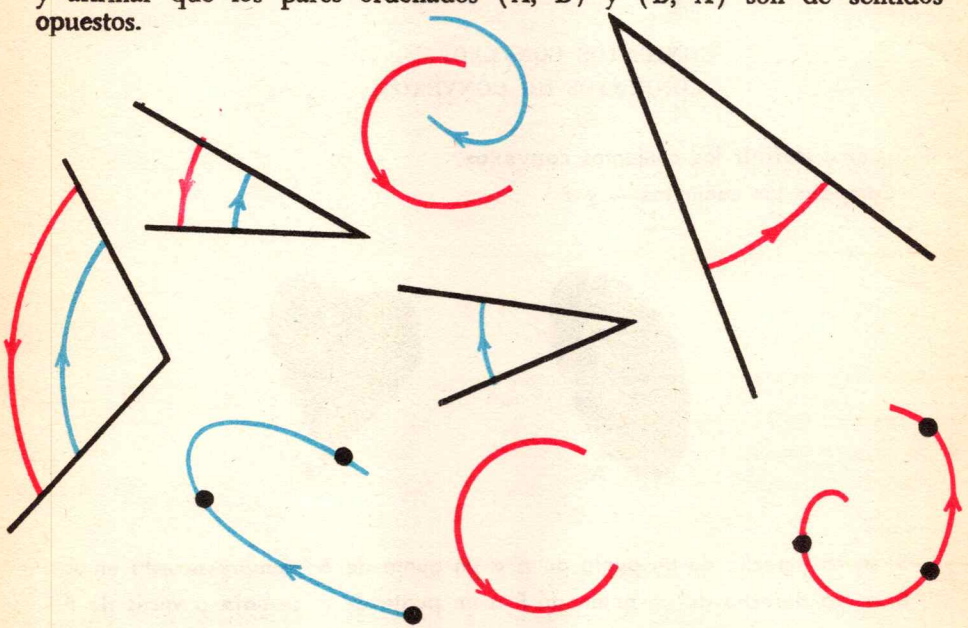


AXIOMA Π 7 — ***En el plano Π hay dos sentidos. Toda terna ordenada de puntos no alineados define uno de los sentidos del plano. Dos ternas ordenadas que definen el mismo sentido se dirán del mismo sentido.***

Si** a, b, c **son tres puntos no alineados, las ternas ordenadas** (a, b, c), (b, c, a) **y** (c, a, b) **son del mismo sentido. Las ternas ordenadas** (c, b, a), (a, c, b), (b, a, c) **definen el sentido opuesto.

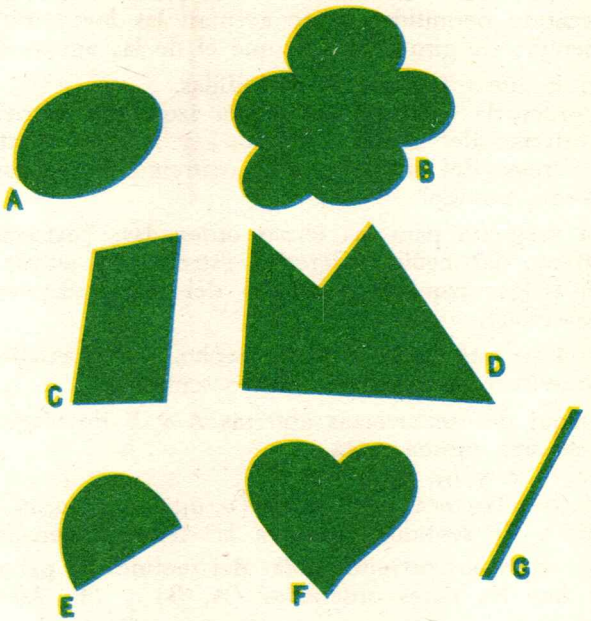
EJERCICIOS

1. Destornillar un tornillo, adelantar la hora en un reloj, definen sentidos opuestos. ¿Es cierto esto para todos los tornillos?
2. La aguja de las horas, la de los minutos y la de los segundos de un reloj, ¿definen en su movimiento el mismo sentido?
3. Un automovilista gira alrededor de una plaza o rotonda en la que hay un solo sentido permitido. Si se aceptan las leyes usuales del tránsito, ¿es este sentido de giro el mismo que el de las agujas de un reloj?
4. Apoya en la mesa tus manos extendidas.
   La terna ordenada (extremo del pulgar izquierdo, extremo del índice izquierdo, extremo del anular izquierdo) y la terna (extremo del pulgar derecho, extremo del índice derecho, extremo del anular derecho), ¿definen el mismo sentido?
5. La misma pregúnta para las ternas ordenadas: (extremo del índice derecho, extremo del meñique derecho, extremo del mayor derecho) y (extremo del pulgar izquierdo, extremo del mayor izquierdo, extremo del anular izquierdo).
6. Este muchacho está nadando estilo pecho. En el amplio movimiento de brazos ¿describen sus manos el mismo sentido?
7. Tenemos aquí dos semirrectas abiertas A y B de origen común o y no incluidas en una misma recta.
   Sean a_1, a_2 ε A y b_1, b_2 ε B.
   Observarás que las ternas ordenadas (o, a_1, b_1) y (o, a_2, b_2) son del mismo sentido y de sentido opuesto a las ternas ordenadas (o, b_1, a_1) y (o, b_2, a_2). Esto nos permite hablar del sentido del par ordenado (A, B) y afirmar que los pares ordenados (A, B) y (B, A) son de sentidos opuestos.



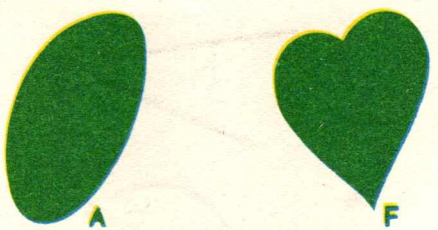
7 — CONVEXIDAD

Los dibujos siguientes representan conjuntos de puntos del plano.
Los conjuntos A, C, E, G se llaman **convexos**.
Los conjuntos B, D, F son llamados **no convexos**.



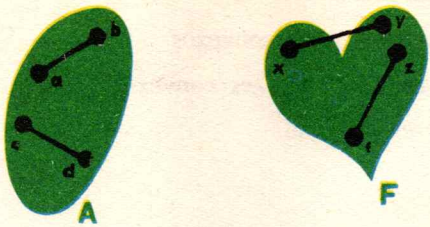
CONJUNTOS CONVEXOS , , , .
CONJUNTOS NO CONVEXOS , , .

— ¿Cómo **definir** los conjuntos **convexos**?
— Compara los conjuntos A y F.



— Si se va derecho de un punto de A a un punto de A, siempre se está en A.
— Si se va derecho de un punto de F a un punto de F, se **sale** a veces de F.

— No digas más. Haz un dibujo que muestre lo que acabas de expresar.



— ¿Qué se sabe de los puntos a, b, c, d, x, y, z, t?

— $a \in A$, $b \in A$, $c \in A$, $d \in A$, $x \in F$, $y \in F$, $z \in F$, $t \in F$.

— Compara

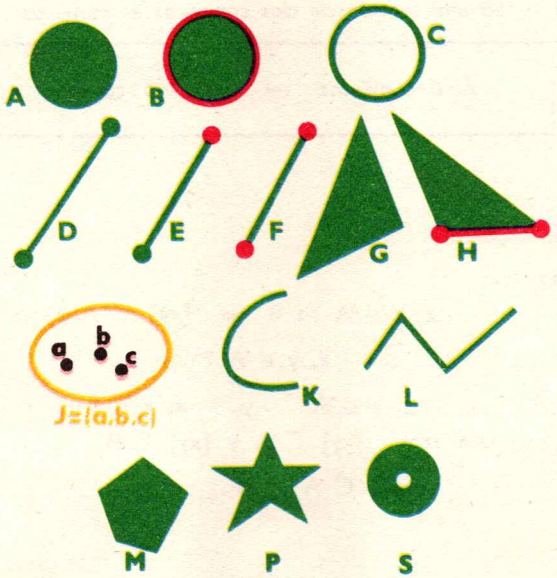
$$[ab] \text{ y } A \qquad\qquad [xy] \text{ y } F$$
$$[cd] \text{ y } A \qquad\qquad [zt] \text{ y } F$$
$$[ab] \subset A,\ [cd] \subset A,\ [xy] \not\subset F,\ [zt] \subset F.$$

— Estamos ahora en condiciones de formular la *definición de conjunto convexo.*

DEFINICIÓN 2 — ***Una parte C de Π es convexa*** $\Longleftrightarrow$
para todo $x, y \in C : [xy] \subset C$.

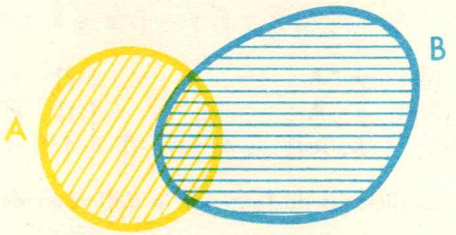
EJERCICIOS

1. Entre los conjuntos siguientes, ¿cuáles son convexos?



2. Presenta 10 conjuntos convexos y 10 conjuntos no convexos, muy diferentes.
3. Toda recta es convexa.
4. Los conjuntos unitarios, ¿son convexos?
5. El par $\{a, b\}$ (con $a \neq b$), ¿es convexo?
6. El conjunto vacío es convexo.

— Representa dos conjuntos convexos A y B tales que $A \cap B \neq \phi$



DOS CONVEXOS NO DISJUNTOS **A, B**

A es el conjunto rayado ///, comprendido el borde

B es el conjunto rayado ≡, comprendido el borde

— ¿Qué piensas de $A \cap B$?

— ¡$A \cap B$ es convexo!

PROPOSICIÓN 3 — *La intersección de dos convexos es convexa.*

$$A, B \text{ convexos} \Rightarrow A \cap B \text{ convexo}$$

DEMOSTRACIÓN:

Se debe probar que

$$x, y \in A \cap B \Rightarrow [xy] \subset A \cap B$$

Sea $x, y \in A \cap B$

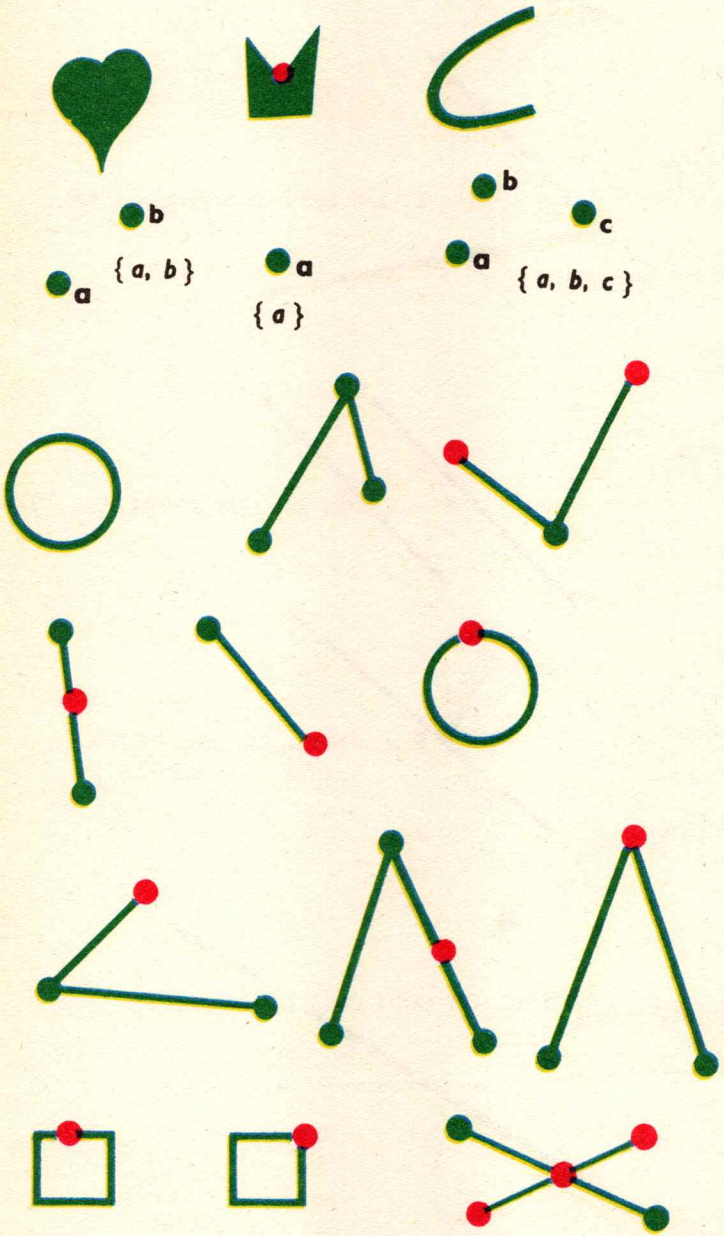
luego $x, y \in A \quad y \quad x, y \in B$

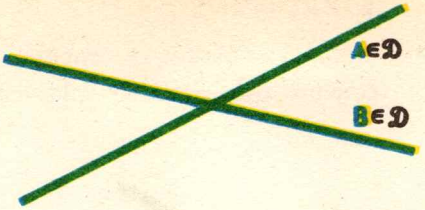
Como A y B son convexos: $[xy] \subset A$ y $[xy] \subset B$

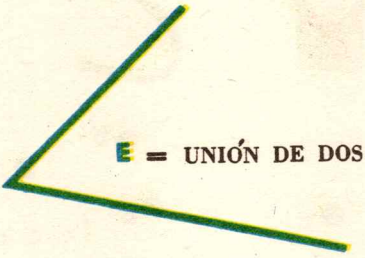
luego $[xy] \subset A \cap B$ l. q. q. d.

EJERCICIOS

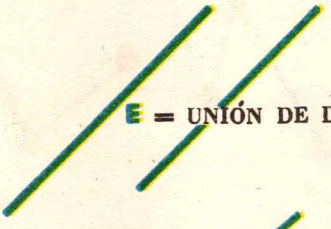
1. *La intersección de* 3, *de* 4, *de* 5 *. . .convexos es convexa.*
2. ¿Cuál es el más pequeño convexo que contiene a los conjuntos no convexos siguientes?



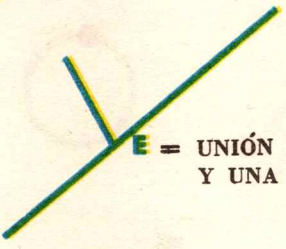




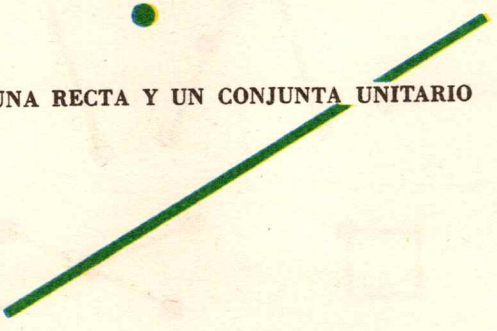
E = UNIÓN DE DOS SEMIRRECTAS



E = UNIÓN DE DOS PARALELAS DIFERENTES



E = UNIÓN DE UNA RECTA
Y UNA SEMIRRECTA



E = UNIÓN DE UNA RECTA Y UN CONJUNTA UNITARIO

12

Funciones

1 — DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

— Mira el gráfico 16 de la relación P . . . *tiene por padre a* . . .
definida en un conjunto E de personas.
De un punto de este gráfico ¿puede partir más de una flecha?

— ¡No, puesto que nadie puede tener dos padres!

— De algunos puntos no parte ninguna flecha. ¿Cómo te lo explicas?

— Esto revela que el padre de la persona representada por un punto tal no es elemento del conjunto E.

— ¿Conoces otros ejemplos de relaciones que gocen de la propiedad
de todo punto del gráfico parte a lo sumo una flecha?

— Las relaciones . . . *tiene por madre a* . . ., . . . *tiene por abuelo paterno a* . . . , *los ciclos*, la relación $x \to x + 5$ en el conjunto de los naturales, . . .

DEFINICIÓN 1 — ***Una relación se llama función ssi de todo punto de su gráfico parte a lo sumo una flecha.***

EJERCICIOS

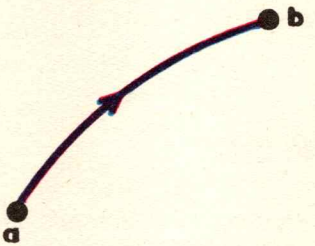
1. ¿Cuáles son funciones entre las relaciones definidas por los gráficos 1 a 80?
2. La relación P^{-1}, recíproca de la relación P: . . . *tiene por padre a* . . ., definida en la humanidad no es una función. ¿Por qué?
3. Una relación R es una función **ssi** para todo objeto x, la imagen R x es un conjunto unitario o el conjunto vacío.
4. La relación recíproca de una función no es siempre una función. ¿Qué ejemplo de los que acabamos de dar prueba esta afirmación?

2 — VALOR DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Las funciones se representan a menudo por minúsculas: f, g, r, s, t, . . .

Supongamos que f designe una función.
f es entonces un conjunto de pares ordenados.

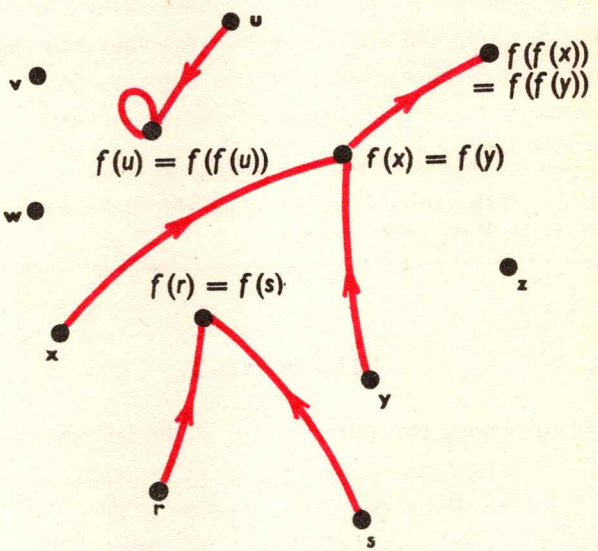
Recordemos que a es el origen y b el extremo del par ordenado (a, b).



Si **x** *es el origen de un par ordenado de* **f**, *se dice que la función* **f está definida en x**, *y se designa por* **f (x)** *el extremo del par de origen* **x**.

El objeto **f (x)** *se llama el* **valor de f en x**.

Se dice también que **f (x)** *es la* **imagen de x** *o que la función* **f aplica x**



LA FUNCION f está definida en r, s, u, x, y, $f(x) = f(y)$, $f(u) = f(f(u))$.
No está definida en v, w, z, $f(r) = f(s)$, $f(f(x)) = f(f(y))$.

GRÁFICO 83

EJERCICIOS

1. Sea f la función *...tiene por capital...*
   Hallar f(Perú), f(Francia), f(Inglaterra), f(Rusia).
   ¿Sobre qué ciudades aplica esta función los países siguientes: Colombia, Bélgica, Venezuela?
   ¿De qué país es Viena la imagen por f?

2. Designemos por f la función $x \to x + 5$.
   Calcula $f(2)$, $f(17)$.
   ¿Cuál es la imagen de cero por f?
   ¿Sobre qué número aplica f el número 7?
   ¿Cuál es el número cuya imagen por f es 8?
   Te dicen que $f(a) = 87$. Calcula a.
   Si y designa un número natural, calcula $f(2y)$ y $f(y + 3)$.

3. Designemos por g la función *...tiene por duplo...*
   ¿Cuál es la imagen de 8 por g?
   ¿Qué número tiene a 18 como imagen?
   Para $g(u) = 100$ calcula u.
   La función g, ¿sobre qué número aplica cero?
   Te advierten que el número x es tal que $g(x) = x$. ¿Qué número es x?

4. La relación f *...está situada en (país)...* es una función definida en toda ciudad.
   ¿Quieres calcular
   f(Buenos Aires), f(París), f(Barcelona), f(Montevideo), f(Marsella), f(Hamburgo), f(Moscú), f(Caracas), f(Boston), f(Milán), f(Estocolmo), f(Valparaíso)?

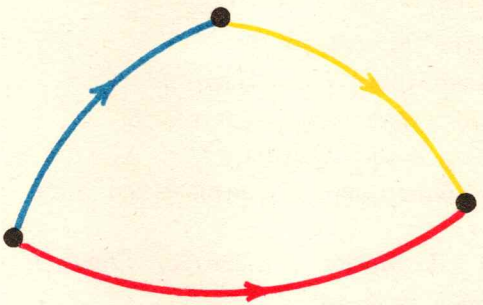
3 — COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

TEOREMA 1 — La compuesta de dos funciones es una función.

Dicho de otro modo: *si* **f** y **g** son funciones, entonces **g** o **f** *es una función.*

Imaginemos el gráfico de f dibujado en azul, el de g en amarillo y el de g o f en rojo.

Existe una flecha roja cada vez que una azu es seguida por una amarilla como indica este esquema (en el cual, excepcionalmente, los tres puntos representan objetos distintos o no).



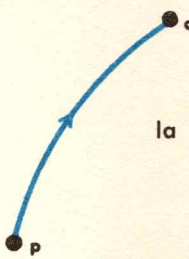
Si de un punto *p* no parte ninguna flecha azul, **entonces** ninguna flecha roja parte de *p*.

Si ninguna flecha azul parte de *p*,

● *p*

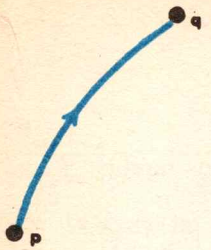
entonces ninguna flecha roja parte de *p*.

Si del punto *p* parte una flecha azul, sabemos que es la única flecha azul que parte de *p*. Llamemos q a su extremo y examinemos la situación en *q*.



la única flecha azul que parte de p

Si del punto *q* no parte ninguna flecha amarilla,
entonces ninguna flecha roja partirá de *p*.



ninguna flecha amarilla parte de q

la única flecha azul que parte de p

ninguna flecha roja que parte de p

Falta la última posibilidad.

Si { Una sola flecha azul parte de *p*. — Ella llega a *q*.
Una sola flecha amarilla parte de *q*. — Ella llega a *r*.

Entonces una sola flecha roja parte de *p*. Ella llega a *r*.

Hagamos un resumen:

Si	Entonces
De *p* no parte ninguna flecha azul.	De *p* no parte ninguna flecha roja.
De *p* parte una, y solo una, flecha azul. Ella llega a *q*. De *q* no parte ninguna flecha amarilla.	De *p* no parte ninguna flecha roja.
De *p* parte una, y solo una, flecha azul. Ella llega a *q*. De *q* parte una, y solo una, flecha amarilla. Ella llega a *r*.	De *p* parte una; y solo una, flecha roja. Ella llega a *r*.

CONCLUSIÓN: De todo punto *p* parte a lo sumo una flecha roja.
O sea la compuesta *g* o *f* es una función.

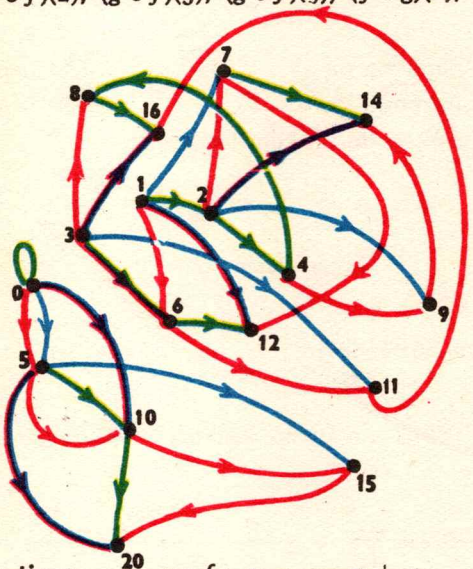
I. q. q. d.

EJERCICIOS

1. En el parágrafo anterior

   $q = f(p)$, $r = g(q)$, $r = g(f(p))$, $r = (g \circ f)(p)$.

2. Sea la función ...*tiene por duplo*..., que indicamos también $f : x \to 2x$.
   Sea g la función definida por $g : y \to y + 5$.
   Calcula $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$, $f(8)$, $f(10)$, $g(4)$, $g(6)$, $g(10)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(5)$
   $(g \circ f)(2)$, $(g \circ f)(3)$, $(g \circ f)(5)$, $(f \circ g)(2)$, $(f \circ g)(3)$, $(f \circ g)(5)$



$f : x \to 2x$
$g : y \to y + 5$
$g \circ f$
$f \circ g$

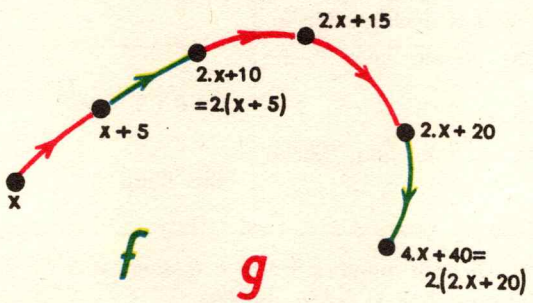
GRÁFICO 84

Se tiene $g \circ f : x \to 2 \cdot x + 5$
$f \circ g : x \to (x + 5) \cdot 2 = 2 \cdot x + 10$.

Expresa también las funciones

$f \circ f$	$: x \to \ldots$	$g \circ g$	$: x \to \ldots$
$f \circ f \circ f$	$: x \to \ldots$	$f \circ g \circ g \circ f \circ g$	$: x \to \ldots$

¿Te puede ayudar este esquema para expresar la última función?



Calcula también $g \circ f \circ f \circ g \circ f : x \to \ldots$

3. Consideremos el conjunto de todas las personas presentes en un acto: vamos a representarlas por puntos negros. Se pide a cada persona que señale a su padre si está en el conjunto.
Se obtiene así el gráfico de la relación P: ...*tiene por padre a*... que representarás por flechas verdes.
Algunas personas están en el acto con varios hijos.
La relación P^{-1} ¿es entonces una función? Justifica tu respuesta.
Examina la relación compuesta P o P^{-1} que representarás mediante flechas negras.
Describe esta relación. ¿Es una función? ¿Por qué?
Se pide que cada uno de los hombres que tiene por lo menos un hijo presente en el acto se señale a sí mismo. Así podemos definir una relación R.
¿Qué piensas de R y de P o P^{-1}?
Examina la relación compuesta P^{-1} o P que representarás por flechas azules.

4. – Piensa un número. Multiplícalo por 2. Agrega 5.
¿Cuánto te dio? – 27.
– ¡Pensaste 11! – ¡Es cierto!
¿Cómo hice para saberlo?

5. Sean las funciones

$f : x \to x \cdot x = x^2$ | $h : x \to 2 \cdot x = 2x$ | $g : x \to x + 5$

Se pide escribir fórmulas análogas para

$g \circ f : x \to x^2 + 5$	$f \circ h :$	$h \circ g \circ f :$
$f \circ g : x \to (x + 5)^2$	$h \circ g :$	$f \circ g \circ h :$
$h \circ f : x \to \ldots$	$g \circ h :$	$h \circ f \circ g \circ h \circ f \circ g :$

Se pide calcular el valor de estas funciones en 0, 1, 2, 3.

6. Si la función f no está definida en x, la función g o f no está definida en x.

7. Si la función f está definida en x y si la función g no está definida en $f(x)$, entonces la función g o f no está definida en x.

8. Cada una de las letras f, g designa una función.
La función g o f está definida en x ssi f está definida en x, y g está definida en $f(x)$.
Si estas dos condiciones se cumplen, **entonces** $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

9. ¿Quieres calcular (M o P)(Felipe II)?

4 — APLICACIONES

Recorrimos una playa de estacionamiento de autos y nos entretuvimos viendo de qué marca era cada uno de los coches. Definimos así una función *f*.

El conjunto P de los coches de esa playa es el conjunto de los objetos en los cuales la función está definida.

Los extremos de los pares de *f* pertenecen todos al conjunto M de las marcas de automóviles.

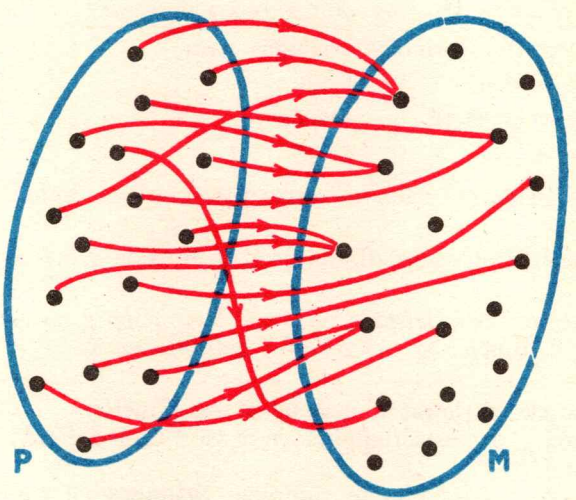
Se describe esta situación por una de las expresiones sinónimas:

f *es una función de* P *en* M

o f *es una* **aplicación** de P en M

Esto se anota $f : P \to M$

Esta situación puede ser representada por el gráfico siguiente:



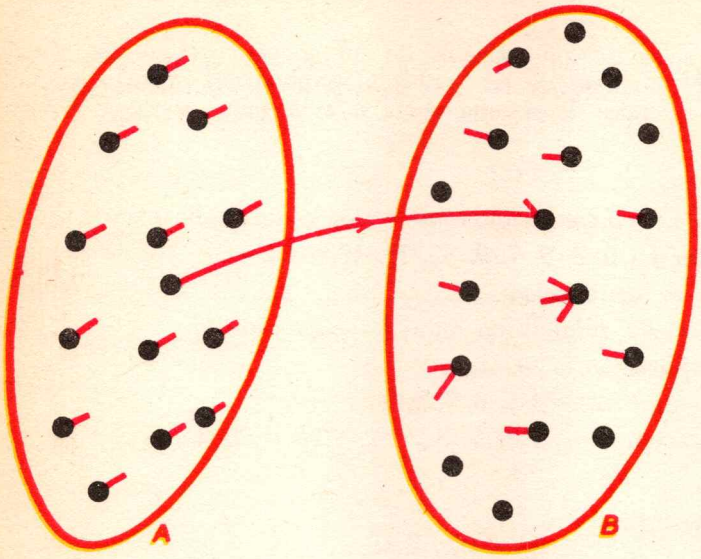
$f : P \to M$: ... es de *marca* ... ...

GRÁFICO 85

De manera general,

$f : A \to B \iff$ { f es una función. A es el conjunto de los orígenes de los pares de f. B contiene el conjunto de los extremos de los pares de f.

Representamos esta situación por el esquema



$f : A \to B$

Todas las flechas de f parten de A y llegan a B

De todo punto de A parte una y solo una flecha de f

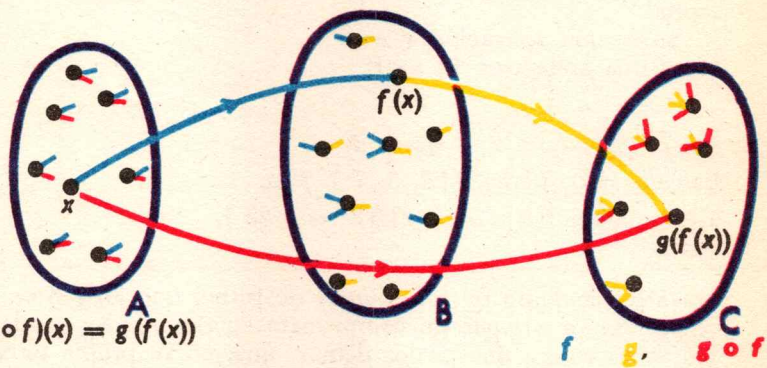
GRÁFICO 86

Si $a \in A$ y $f : A \to B$, la función f está definida en a y se dice que ella **aplica** a sobre $f(a) \in B$.

Para toda parte P de A, el conjunto fP de los extremos de las flechas de f que parten de P es llamado **imagen de P por f.**

$$fP = \{ f(p) \mid p \in P \}$$

Compone las aplicaciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$.



Se tiene $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

TEOREMA 2 — La compuesta $g \circ f$ de las aplicaciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$ es la aplicación $g \circ f : A \to C$.

EJERCICIOS

1. La lista de precios de los artículos de un negocio define una función $m : V \to M$ del conjunto de las ventas al público del negocio sobre los montos de esas ventas. Para toda venta $v \in V$, $m(v)$ designa el monto de la venta v.

2. La función $x \to x + 5$ considerada más arriba es una aplicación $f : \omega \to \omega$.
   ¿Quieres calcular $f\{0, 2, 5, 7, 9, 85, 78, 17, 1\}$?
   La relación f^{-1} es una función.
   Esta función no está definida en todos los puntos de ω.
   f^{-1} **no** es una aplicación $\omega \to \omega$.
   f es una aplicación $f : \omega \to \{5, 6, 7, 8, 9 \ldots\}$.
   f^{-1} es una aplicación $f^{-1} : \{5, 6, 7, 8 \ldots\} \to \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

3. Sea $f : \omega \to \omega : x \to 7x$.
   Calcula $f(2)$, $f\{3\}$, $f\{3, 4\}$, $f\,\omega$, $f\,2\,\omega$.
   (Respuestas: $f(2) = 14$, $f\{3\} = \{21\}$, $f\,\omega = 7\,\omega, \ldots$).
   La relación f^{-1} es una función que no está definida en todo punto de ω.
   No es una **aplicación** $\omega \to \omega$.
   f^{-1} es una aplicación $f^{-1} : 7\,\omega \to \omega$.

4. La relación f : *...tiene por capital...* es una aplicación $f : P \to V$ del conjunto de los países en el conjunto de las ciudades.
   La imagen fP es el conjunto de las capitales.
   f^{-1} es una función que no está definida en toda ciudad, pero sí en toda capital.
   f^{-1} no es una aplicación $V \to P$.
   f^{-1} es una aplicación $fP \to P$.

5. Sea $f : \omega \to \omega : x \to 6x + 7$.
   Calcula $f(0)$, $f\{3\}$, $f\{2, 5, 7\}$, $f\,\omega$.
   (Respuestas: $f(0) = 7$, $f\{3\} = \{25\}$, ...).

6. Sea D el conjunto de los equipos de fútbol que juegan en una misma división. Se va a jugar un campeonato en dos ruedas (cada equipo jugará dos veces contra uno de los demás: una, en su propio terreno; la otra, en el del contrincante).
   Si D se compone de n equipos, ¿cuántos partidos se jugarán en el campeonato?

Si x, y designan equipos distintos, indicaremos por $f(x, y)$ el resultado del partido $x - y$ jugado en el terreno de x. Luego $f(x, y) \in \omega \times \omega$.

La relación f es una función. ¿Está definida en todo punto de $D \times D$?

Designemos por M el conjunto de los partidos y por Δ_D el conjunto de los pares ordenados idénticos de elementos de D. Como todo partido puede ser representado por un par ordenado de equipos distintos, podemos escribir

$$M = (D \times D) \setminus \Delta_D$$

f es una aplicación $M \to \omega \times \omega$.

En general, la relación f^{-1} no es una función. Explica tu respuesta.

¿Crees que haya habido un solo campeonato para el cual f^{-1} haya sido una función? Justifica tu respuesta.

7. ¿La situación habría sido la misma para un campeonato de basket-ball? Sea $h : 2\omega \to \omega : t \to t + 1$.

2ω es el conjunto de los naturales pares y $h(2\omega)$ es el conjunto de los naturales impares.

8. Sea $\mathfrak{S}$ el conjunto de las semirrectas cerradas.

Para todo $S \in \mathfrak{S}$, designemos por $g(S)$ el origen de S.

Se ha definido así una función $g : \mathfrak{S} \to \Pi$.

La relación g^{-1} no es una función.

9. **Si** $f : A \to B$, **entonces** $f^{-1} \circ f$ es la relación *...tiene la misma imagen por f que...*
Esta relación es una equivalencia definida en A.

5 — BIYECCIONES

Hemos visto numerosas aplicaciones $f : A \to B$ tales que f^{-1} no es una aplicación $B \to A$.

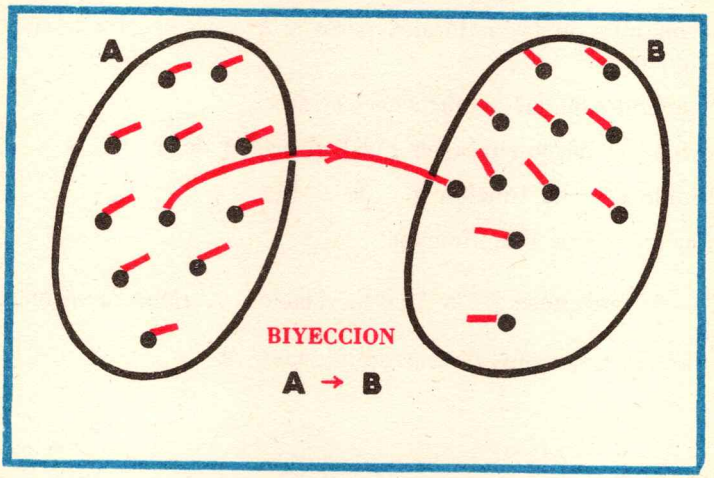
Da varios ejemplos de tales situaciones.

Hemos encontrado algunos ejemplos de aplicaciones $f : A \to B$ tales que f^{-1} es una aplicación $f^{-1} : B \to A$.

DEFINICIÓN 2 — *Se llama* ***biyección*** *toda aplicación* $f : A \to B$ *tal que* f^{-1} *es una aplicación* $f^{-1} : B \to A$.

Da 10 ejemplos de biyecciones.

El esquema que sigue resume la definición de *biyección*.



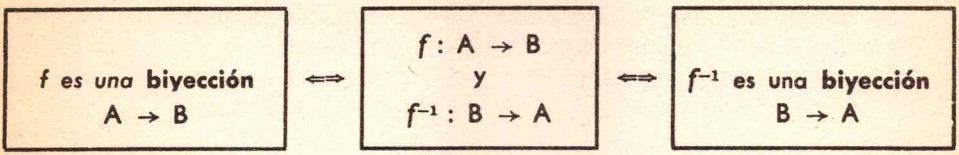
DEFINICIÓN 2 — *La relación* f *es una* ***biyección*** $f : A \to B$ *ssi*

1. *Todas las flechas de* f *parten de* A *y llegan a* B.
2. *De todo punto de* A *parte una, y solo una, flecha de* f.
3. *A todo punto de* B *llega una, y solo una, flecha de* f.

Como las condiciones 1 y 2 significan que f es $f : A \to B$, se puede también enunciar.

DEFINICIÓN 2 — *La aplicación* $f : A \to B$ *es* ***biyectiva*** *ssi a todo punto de* B *llega una, y solo una, flecha de* f.

La definición 2 nos permite escribir:



Es muy fácil ahora ver que la compuesta de biyecciones es una biyección.

TEOREMA 3 — La compuesta de las biyecciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$ es la biyección $g \circ f : A \to C$.

DEMOSTRACIÓN:

La compuesta $g \circ f$ es una aplicación $g \circ f : A \to C$ (teorema 2).

Sabemos que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Como f y g son biyecciones,

$$f^{-1} : B \to A, \qquad g^{-1} : C \to B$$

y por el teorema 2

$$f^{-1} \circ g^{-1} : C \to A.$$

c. q. f. d.

EJERCICIOS

1. C designa el conjunto de las alumnas de nuestra clase.

A designa el conjunto de los apellidos de las alumnas de nuestra clase.

Si no hay dos alumnas de nuestra clase que tengan el mismo apellido, la función f que aplica cada alumna sobre su apellido es una biyección

$$f : C \to N.$$

Si tú eres t, ¿qué valor tiene $f(t)$?

Cada vez que señalamos una alumna, ella puede dar su apellido.

$$f : C \to N.$$

Cada vez que en la clase el profesor pronuncia uno de los apellidos de C, una, y solo una, alumna se levanta.

$$f^{-1} : N \to C.$$

2. La relación f : "...*tiene por esposa a*..." es una biyección $f : H \to M$ del conjunto H de los europeos casados sobre el conjunto M de sus esposas.

¿Por qué hemos elegido el conjunto de los europeos casados y no el conjunto de todos los hombres casados del mundo?

f^{-1} es una biyección $M \to H$.

3. La relación d : ...*tiene por duplo*... es una biyección $\omega \to 2\,\omega$ del conjunto de los enteros naturales sobre el conjunto de los enteros naturales pares.

4 La relación t : ...*tiene por triplo*... es una aplicación $t : \omega \to \omega$.

No es una biyección $\omega \to \omega$. ¿Por qué?

Es una biyección $t : \omega \to 3\,\omega$.

Se tiene

$$t : \omega \to 3\,\omega : x \to 3\,x.$$

Completa

$$t^{-1} : 3\,\omega \to \omega : \ldots \to \ldots .$$

5. La relación ...*tiene por nariz*... es una biyección $P \to N$ del conjunto P de estas personas sobre el conjunto N de sus narices.

6. Las aplicaciones

$$f : \omega \to 2\,\omega : x \to 2\,x$$
$$g : 2\,\omega \to 6\,\omega : x \to 3\,x$$

son biyecciones.

La compuesta $g \circ f$ es la biyección

$$g \circ f : \omega \to 6\,\omega : x \to 6\,x.$$

7. La función idéntica en el conjunto E

$$1_E : E \to E : x \to x .$$

es una biyección.

8. Si f designa una biyección $f : A \to B$,

se tiene $1_B \circ f = f = f \circ 1_A$.

6 — INYECCIONES Y SURYECCIONES

DEFINICIÓN 2 —

La aplicación $f : A \to B$ es una biyección. $\iff$ La aplicación $f : A \to B$ es tal que: a todo punto de B llega **una, y solo una,** flecha de f

Separemos la locución

una y solo una

en

al menos una y a lo sumo una

. Lo cual nos lleva a definir

DEFINICIÓN 3 — *La aplicación* $f : A \to B$ *se llama* ***suryectiva*** *ssi a todo punto de B llega* ***al menos*** *una flecha de* f.

Se llama ***suryección*** *toda aplicación suryectiva.*

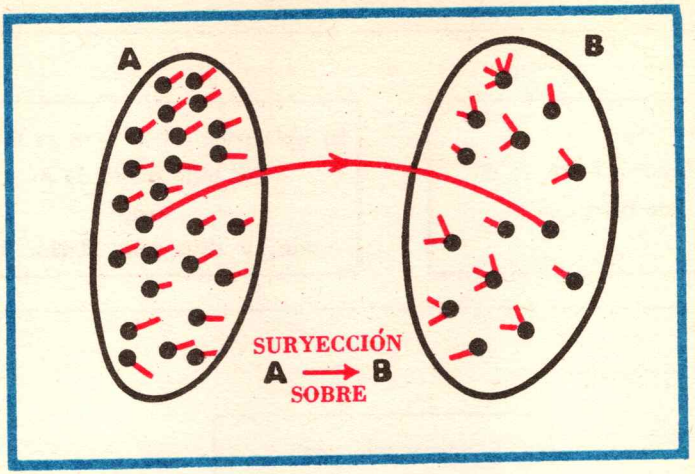
DEFINICIÓN 4 — *La aplicación* $f : A \to B$ *se llama* ***inyectiva*** *ssi a todo punto de B llega* ***a lo sumo*** *una flecha de* f.

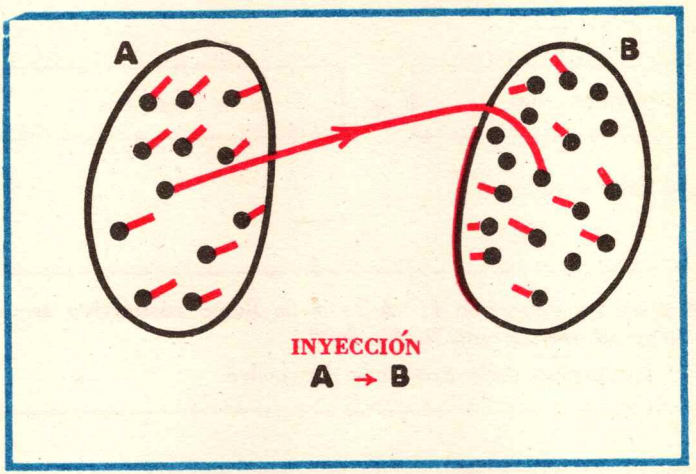
Se llama ***inyección*** *toda aplicación inyectiva.*

DEFINICIÓN 5 — *La aplicación* $f : A \to B$ *se llama* ***biyectiva*** *ssi es a la vez* ***inyectiva*** *y* ***suryectiva.***

Se llama ***biyección*** *toda aplicación biyectiva.*

He aquí los esquemas de estas definiciones:





El examen de estos esquemas revela inmediatamente que las definiciones 3 y 4 pueden ser formuladas como sigue:

DEFINICIÓN 3 — *Se llama* ***suryección*** *toda aplicación* $f : A \to B$ *tal que* $fA = B$.

DEFINICIÓN 4 — *Se llama* ***inyección*** *toda aplicación* $f : A \to B$ *tal que para todo* $x, y \in A$: $x \neq y \quad f(x) \neq f(y)$.

EJERCICIOS

1. Cuando se juega al bridge y se distribuyen las cartas entre cuatro jugadores, se define una suryección $d : C \to J$ del conjunto C de las cartas sobre el conjunto J de los jugadores.

2. La relación *...tiene por cuadrado...* es una inyección : $\omega \to \omega$.
Es una biyección de ω sobre el conjunto de los cuadrados perfectos.

3. Un niño lloriquea en la calle. De sus quejas percibimos estas palabras: "...el reparto ... ji ... caramelos ... ji ... no fue suryectivo..."

   Da un caramelo al niño y explica a su abuela lo que él quiere decir.

4. Toda aplicación $A \to B$ es una suryección $A \to fA$.

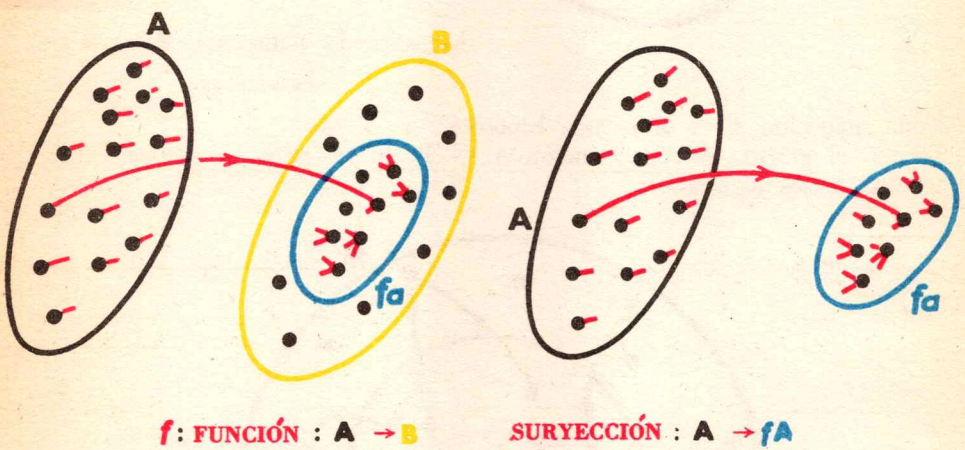


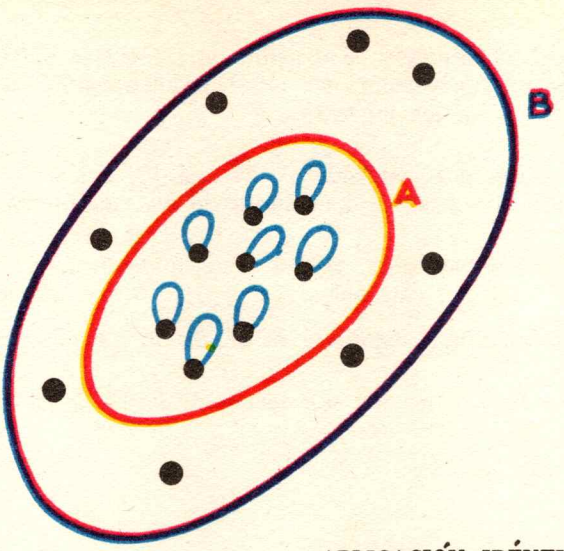
GRÁFICO 87

5. Sea C el conjunto de los alumnos de tu clase.
Sea N el conjunto de los nombres de los alumnos de tu escuela.
La aplicación

$$n : C \to N : x \to n(x),$$

en la que $n(x)$ designa el nombre del alumno x, ¿es inyectiva?
No creo yo que sea suryectiva.
No creo, pues, que pueda ser una biyección. ¿Por qué?

6. Si A ⊂ B, la función idéntica A → B : $a \to a$ es una inyección.



APLICACIÓN IDÉNTICA **A → B**

GRÁFICO 88

7. Toda inyección A → B es una biyección A → fA.
8. Dibuja el gráfico de una función A → B ni inyectiva ni suryectiva en los tres casos siguientes:

1) A ⊂ B

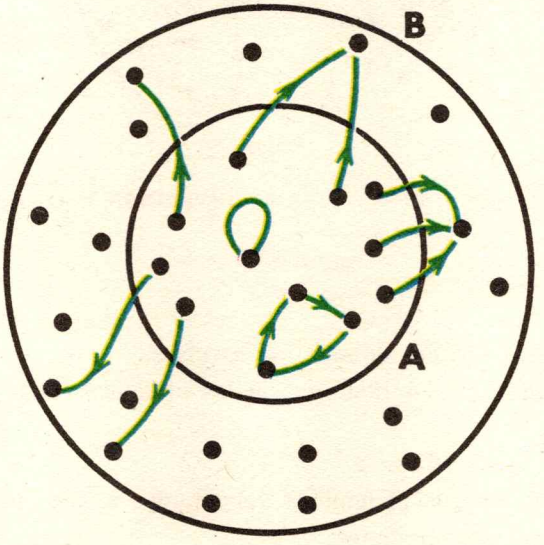


GRÁFICO 89

2) $A \cap B \neq \phi$, $A \not\subset B$, $B \not\subset A$

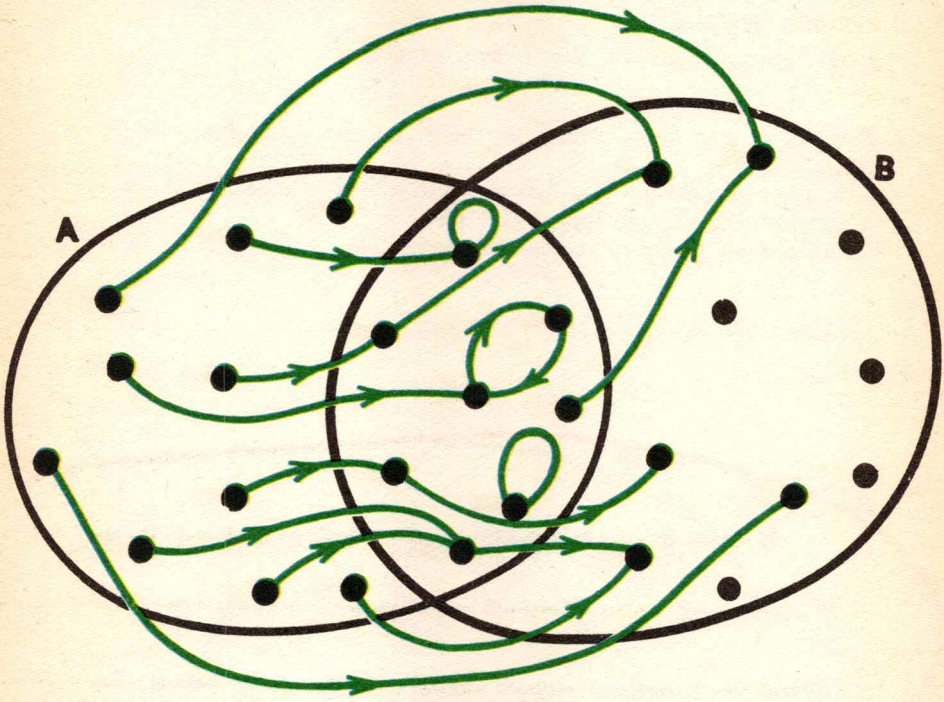


GRÁFICO 90

3) $A \supset B$

9. La función que aplica toda semirrecta cerrada sobre su origen es una suryección no inyectiva : $\mathcal{S} \to \Pi$ del conjunto $\mathcal{S}$ de las semirrectas cerradas **sobre** Π.

10. Sea C una circunferencia de radio no nulo y de centro o. Para todo $x \in C$, establezcamos $f(x) = xo$.

De este modo hemos definido la aplicación

$$f : C \to \mathfrak{D}_o : x \to xo$$

de C en el conjunto $\mathfrak{D}_o$ de las rectas de Π que contienen a o.

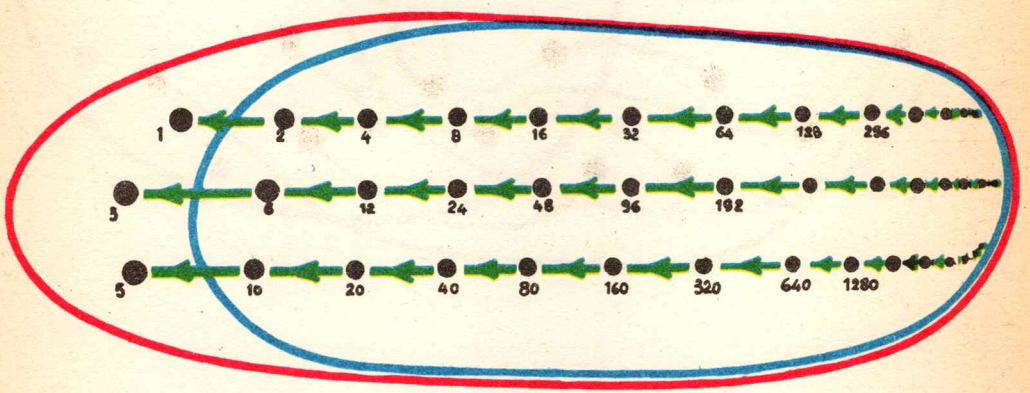
La aplicación f es suryectiva y no inyectiva.

11. Sea C el conjunto de las compras posibles de efectuar en este negocio. Designando por $v(c)$ el valor de la compra $c \in C$, se ha definido una función $v : C \to V$ que aplica C en el conjunto V de los valores de las compras posibles.

Esta aplicación no es, por cierto, inyectiva.

12. Pascuas es una fiesta móvil, es decir, no cae todos los años en la misma fecha.
Esta situación define una función que aplica el conjunto A de los años en el conjunto F de las fechas del año.
Esta función no es inyectiva ni suryectiva.

13. La función $2\,\omega \to \omega : 2\,x \to x$ es una suryección $2\,\omega \to \omega$ con $2\,\omega \subset \omega$.



$2\,\omega \to \omega : 2\,x \to x$

GRÁFICO 91

14. Sea P el conjunto de los partidos de fútbol jugados en la división 1ª el año último.

La función $f : P \to \omega \times \omega$ que aplica todo partido sobre su *score* no es ni inyectiva ni suryectiva.

15. Sea P el conjunto de los partidos de basket-ball jugados esta semana en 1ª división. Estoy casi seguro de que la función *score* $f : P \to \omega \times \omega$ es inyectiva.

¿Por qué?

16. Para todo $n \in \omega$, designemos por $u(n)$ la cifra de las unidades de n escrita en sistema decimal.

La función $u : \omega \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ es suryectiva y no inyectiva.

$$u^{-1}\, u\{3\} = \{3, 13, 23, \ldots, 103, 113, \ldots\} = 10\,\omega + 3.$$

17. Designemos por A el conjunto de los pares y de los conjuntos unitarios de números naturales: $A = \{\{x, y\} \mid x, y \in \omega\}$.

Para todo elemento $\{x, y\} \in A$, establecemos que $(\{x, y\}) = x + y$.

La función $s : A \to \omega$ así definida es suryectiva y no inyectiva.

Se tiene a $s^{-1}\, s\{\{3, 5\}\} = \{\{0, 8\}, \{1, 7\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{4\}\}$.

Calcula $s^{-1}\, s\{\{3, 13\}\}$.

¿Podrías decirme cuántos elementos tiene el conjunto $s^{-1}\, s\,(\{50, 51\})$?

18. Para todo $n \in \omega$, llamemos $d(n)$ el número de las decenas de n. Se tiene entonces $d(17) = 1$, $d(1962) = 196$, $d(8) = 0$.

La función $d : \omega \to \omega$ es suryectiva y no inyectiva.

Se tiene a $d^{-1}\, d\{18\} = \{10, 11, 12, 14, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$

Calcula $d^{-1}\, d\{117\}$.

¿Cuántos elementos tiene

$$d^{-1}\, d\ \{189.\,887.\,639.\,583.\,112.\,223.\,487\}\ ?$$

Te advierten que

$$x, y \in \omega;\quad x \leqslant y;\quad d(x) = d(y).$$

¿Qué puedes decir de $y - x$?

19. Sea $B = \{\{2x, 2y\} \mid x, y \in \omega\}$ y $p(\{2x, 2y\}) = 2x \times 2y = 4\,x\,y$.

La aplicación $p : B \to \omega$ así definida no es ni inyectiva ni suryectiva.

Calcula pB, $p^{-1}\, p\{\{2, 4\}\}$, $p^{-1}\, p\{\{6, 18\}\}$,

$$p\, p^{-1}\{\{898, 1786\}\},\ p^{-1}\, p\{\{6\}\}.$$

7 — COMPOSICIÓN DE INYECCIONES Y SURYECCIONES

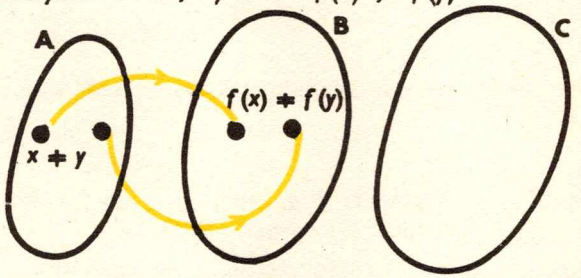
TEOREMA 4 — La compuesta g o f de las inyecciones f : A → B y g : B → C es una inyección A → C.

DEMOSTRACIÓN:

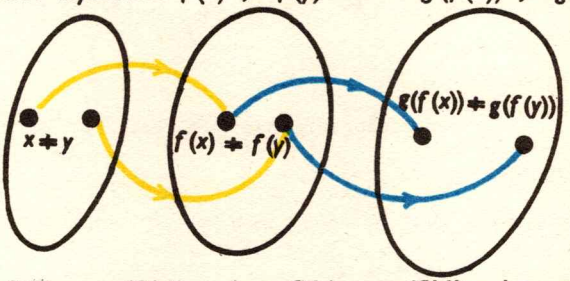
Se debe probar que para todo $x, y \in A$:

$$x \neq y \Rightarrow (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(y).$$

Como f es una inyección : $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

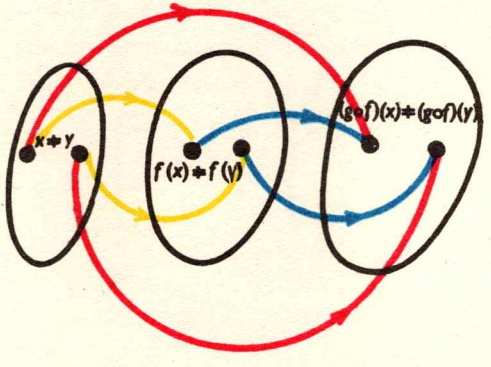


Como g es una inyección: $f(x) \neq f(y) \Rightarrow g(f(x)) \neq g(f(y))$



Como $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ y $(g \circ f)(y) = g(f(y))$ se ha probado que

$$x \neq y \Rightarrow (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(y)$$



l. q. q. d.

TEOREMA 5 — La compuesta $g \circ f$ de las suryecciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$ es una suryección $g \circ f : A \to C$.

$$f : A \overset{\text{sobre}}{\to} B \ \text{y} \ g : B \overset{\text{sobre}}{\to} C \Rightarrow g \circ f : A \overset{\text{sobre}}{\to} C$$

Por el teorema 2 sabemos que la compuesta $g \circ f$ de las aplicaciones f y g es una aplicación $A \to C$.

Falta probar que $g \circ f$ es suryectiva, es decir, que $(g \circ f)\, A = C$.

Esto resulta del siguiente cálculo:

$$(g \circ f)A = gfA$$

$= g\, B$ (pues $fA = B$, puesto que $f : A \to B$ es suryectiva).

$= C$ (pues $gB = C$, puesto que $g : B \to C$ es suryectiva).

l. q. q. d.

EJERCICIOS

1. ¿Qué puedes decir de la compuesta

$$g \circ f : \omega \to \omega : x \to 3x + 7 \ ?$$

¿De las inyecciones

$$f : \quad \omega \to \omega : x \to 3x \ ?$$

$$g : \quad \omega \to \omega : x \to x + 7 \ ?$$

Calcula las compuestas

$$g \circ f \circ f \circ g \circ f$$

$$f \circ g \circ g \circ f \circ g$$

¿Qué puedes decir de ellas?

2. Las funciones que escribimos a continuación son inyectivas:

$$\omega \to \omega \ : \ x \to 7x - 3$$

$$\omega \to \omega \ : \ x \to 7(x - 3).$$

3. Si f es una función no inyectiva $A \to B$ y $g : B \to C$, entonces $g \circ f$ es una función no inyectiva $A \to C$.

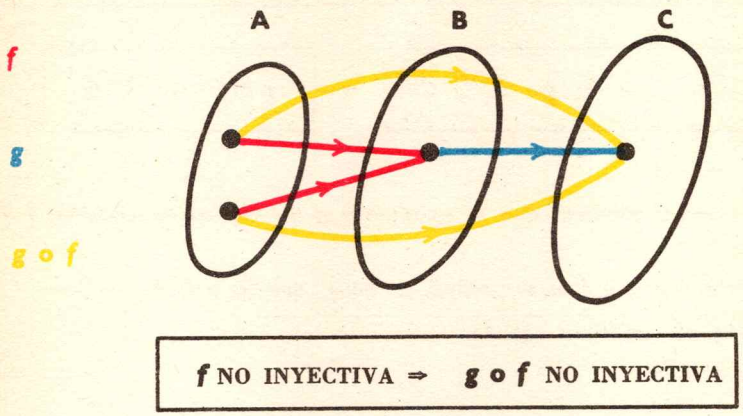


GRÁFICO 92

4. Si $f : A \to B$ y si g es una función no suryectiva $B \to C$, entonces $g \circ f$ es una función no suryectiva $A \to C$.

5. Construye 3 conjuntos A, B, C, una función f no suryectiva $A \to B$, una función g no inyectiva $B \to C$ de manera que $g \circ f$ sea una biyección $A \to C$.

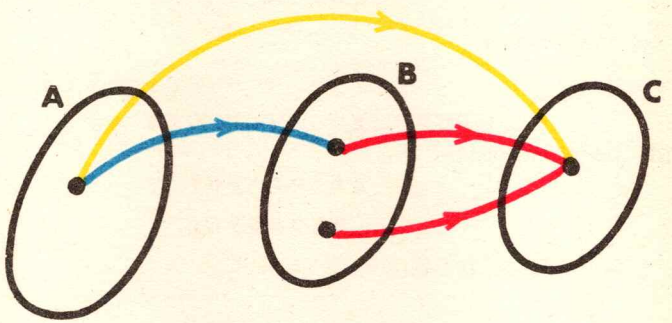


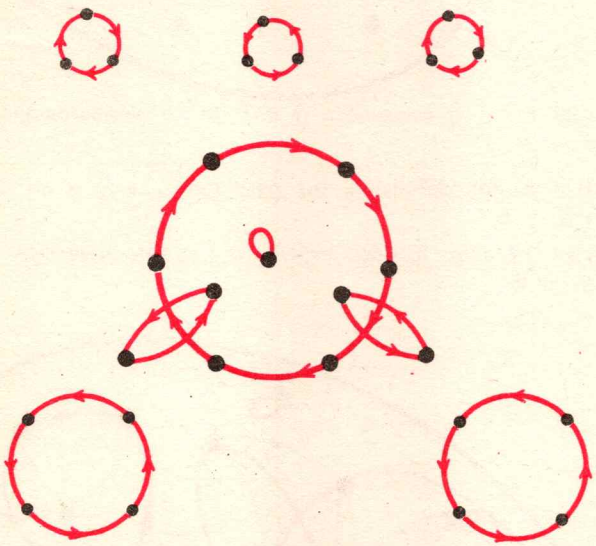
GRÁFICO 93

13

Permutaciones

1 — PERMUTACIONES

— He aquí un momento de un ballet. Cada bailarina ha tomado con su mano derecha la mano izquierda de una bailarina. Así queda definida una relación que esquematiza el gráfico siguiente:



BALLET

GRÁFICO 94

— La primera bailarina ha juntado las manos encima de su cabeza. ¿Dónde está?

Ciertas bailarinas forman rondas. Dime cuáles son las bailarinas que dan la cara al interior de la ronda.

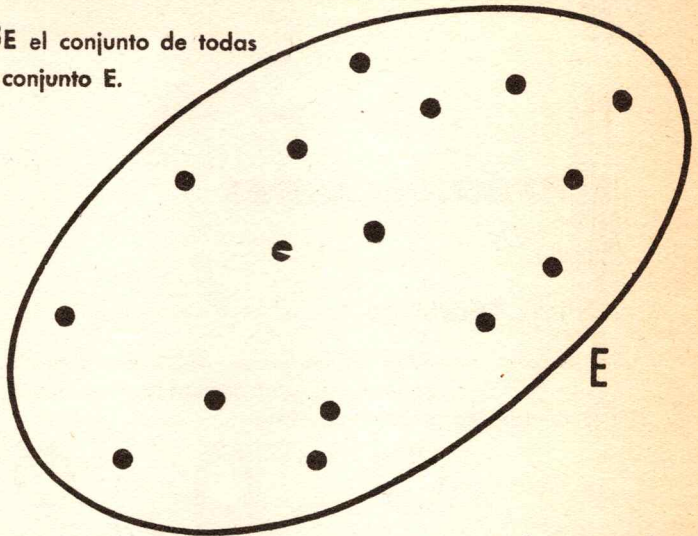
— Es evidente que en el gráfico 94, de todo punto parte una, y solo una, flecha y a todo punto llega una, y solo una, flecha.

Se llama **permutación** toda relación definida por un gráfico así.

DEFINICIÓN — *Se llama* ***permutación en el conjunto*** **E** *toda biyección* $E \to E$.

2 — GRUPO DE LAS PERMUTACIONES DE UN CONJUNTO

Designaremos por $\mathfrak{S}E$ el conjunto de todas las permutaciones en el conjunto E.

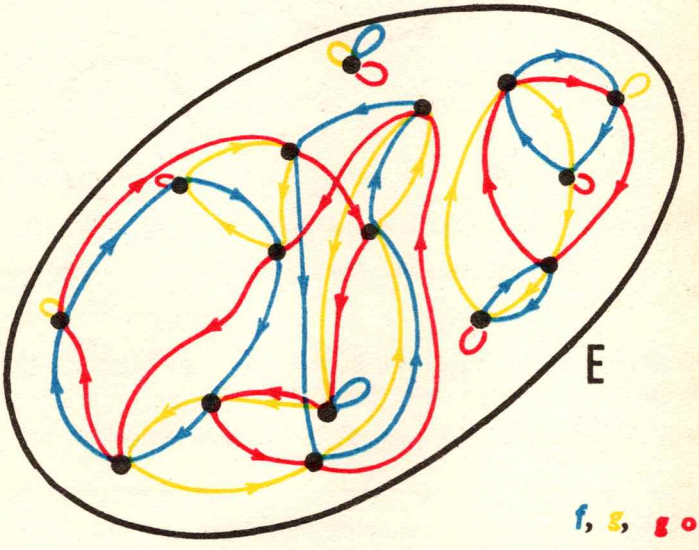


PROPOSICIÓN 1 — *La compuesta* $g \circ f$ *de las permutaciones* f *y* g *en* E *es una permutación en* E.

DEMOSTRACIÓN: Por definición, las permutaciones f, g en E son biyecciones $f : E \to E$ y $g : E \to E$.

Por tanto (cap. 12, teor. 3, pág. 193), $g \circ f$ es una biyección $E \to E$, es decir, una permutación en E.

Luego $g \circ f \in \mathfrak{S}E$.



f, g, $g \circ f \in \mathfrak{S}E$

GRÁFICO 95

PROPOSICIÓN 2 — *La composición de permutaciones es asociativa.*

Para todo $f, g, h \in \mathfrak{S}E : (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Esta proposición resulta de la asociatividad de la composición de relaciones.

PROPOSICIÓN 3 — *La función idéntica en E*

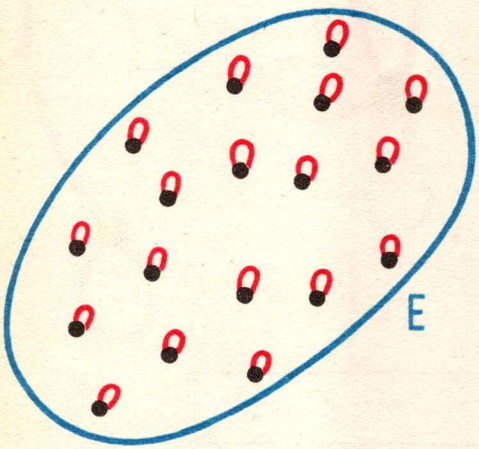
$$1_E : E \to E : x \to x \quad \textit{es una permutación en } E.$$

Además, para todo $f \in \mathfrak{S}E$, *se tiene a* $1_E \circ f = f \circ 1_E = f$,

lo cual se expresa diciendo que 1_E *es* ***neutro*** *para* $\circ$.

Se obtiene un gráfico de 1_E adornando con un lazo todo punto representativo de E.

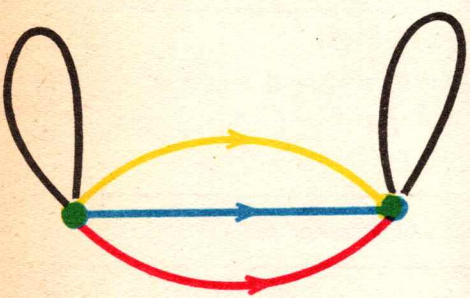
Queda entonces verificado que de todo punto de E parte una, y solo una, flecha (¡lazo!) y a él llega una, y solo una, flecha (¡lazo!).



LA PERMUTACIÓN IDÉNTICA 1_E.

GRÁFICO 96

La segunda parte de la proposición resulta de los esquemas siguientes

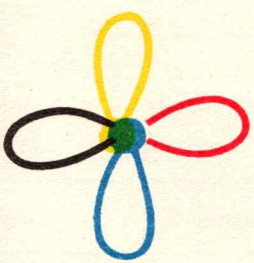


1_E

f

$1_E \circ f$

$f \circ 1_E$



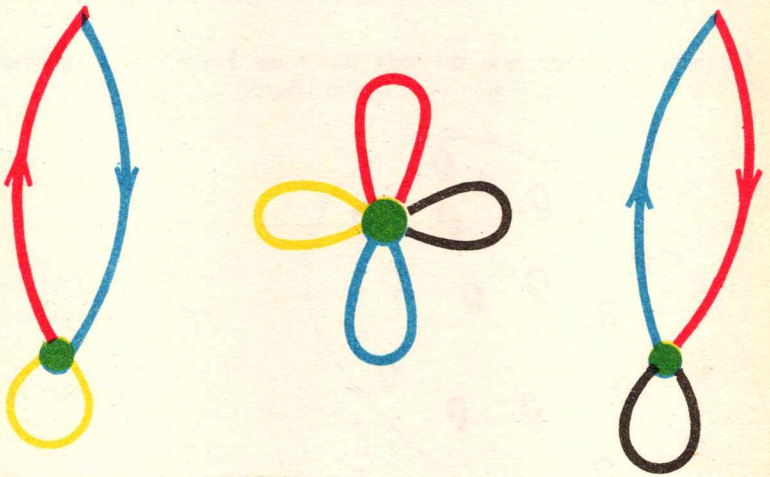
$$1_E \circ f = f \circ 1_E = f.$$

Toda permutación f en E es una biyección $f : E \to E$.
Su recíproca es, pues, una biyección $f^{-1} : E \to E$ y $f^{-1} \in \mathfrak{S}E$
Luego $f \circ f^{-1}, f^{-1} \circ f \in \mathfrak{S}E$.
Podemos precisar que

PROPOSICIÓN 4 — $f^{-1} \circ f = 1_E = f \circ f^{-1}$

Esta proposición surge de los tres esquemas

f f^{-1} $f \circ f^{-1}$ $f^{-1} \circ f$



$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = 1_E$$

Las proposiciones 1 a 4 nos hacen saber que

1. Si $f, g \in \mathfrak{S}E$ $\quad f \circ g \in \mathfrak{S}E$
2. Si $f, g, h \in \mathfrak{S}E$ $\quad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
3. $1_E \in \mathfrak{S}E$ y para toda $f \in \mathfrak{S}E$: $\quad 1_E \circ f = f = f \circ 1_E$
4. Para toda $f \in \mathfrak{S}E : f^{-1} \in \mathfrak{S}E$ y $f \circ f^{-1} = 1_E = f^{-1} \circ f$

El conjunto de estas proposiciones se expresa brevemente por el

TEOREMA — **$\mathfrak{S}E$, o es un *grupo*** (*que se llama* **grupo simétrico** de **E**).

EJERCICIOS

1. Las relaciones definidas por los gráficos 17, 18, 19, 20, 21 son permutaciones.

2. Nuestro profesor de matemáticas ha resuelto cambiarnos de banco para la prueba escrita. Le ha parecido mejor hablar lo menos posible y para indicar a cada alumno su nueva ubicación se ha limitado a dibujar este esquema en el pizarrón.

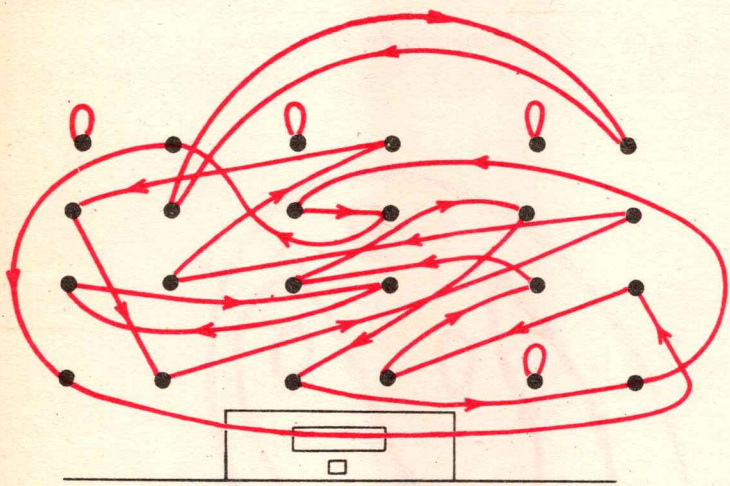


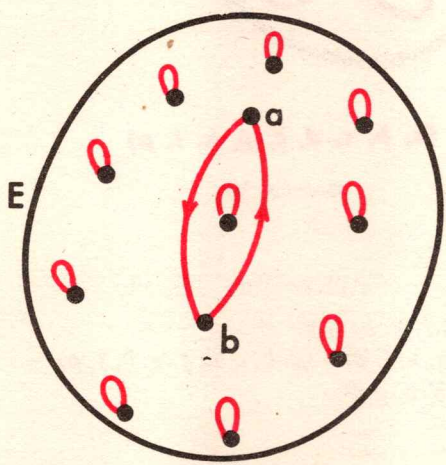
GRÁFICO 97

Este cambio de lugar define una *permutación*.

¿Cuáles son los alumnos que no han cambiado de lugar?

3. Sean $a, b \in E$ y $a \neq b$.

Se designará por (a, b) la permutación en E definida por el gráfico que sigue:



(a, b)

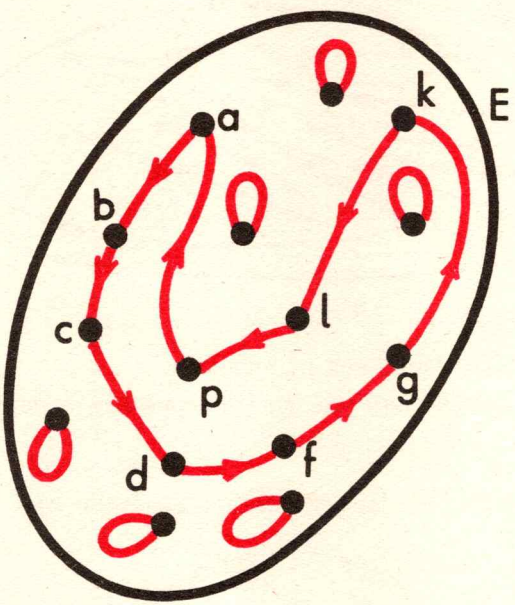
GRÁFICO 98

Se tiene entonces

$(a, b) = (b, a) = (a, b)^{-1} = (b, a)^{-1}$
$(a, b) \circ (a, b) = 1_E$
$(a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) = (a, b)$
$(a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) = 1_E$

La permutación (a, b) se llama *transposición.*

4. Sean $a, b, c, d, f, g, k, l, p$ elementos de E distintos dos a dos.
Se designa por $(a, b, c, d, f, g, k, l, p)$ la permutación en E definida por el gráfico



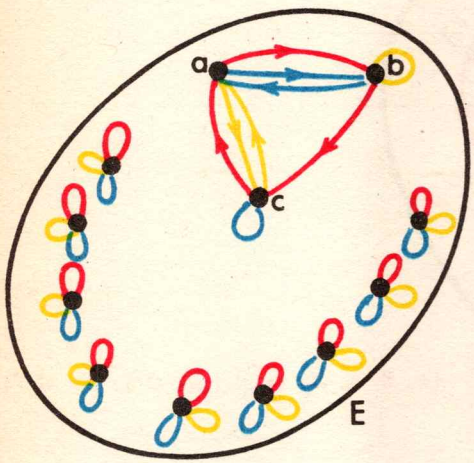
$(a, b, c, d, f, g, k, l, p)$

GRÁFICO 99

Una permutación tal toma el nombre de ciclo.
Se tiene $(a, b, c, d, f, g, k, l, p)^2 =$
$= (a, b, c, d, f, g, k, l, p) \circ (a, b, c, d, f, g, k, l, p)$
$= (a, c, f, k, p, b, d, g, l).$

5. Sea un conjunto E y a, b, c elementos de E diferentes 2 a 2. Sucede entonces que

$$(a, b, c) = (a, c) \circ (a, b)$$
$$(a, b, c) \circ (a, b, c) = (c, b, a) = (a, b, c)^{-1}$$
$$(a, b, c) \circ (a, b, c) \circ (a, b, c) = 1_E.$$

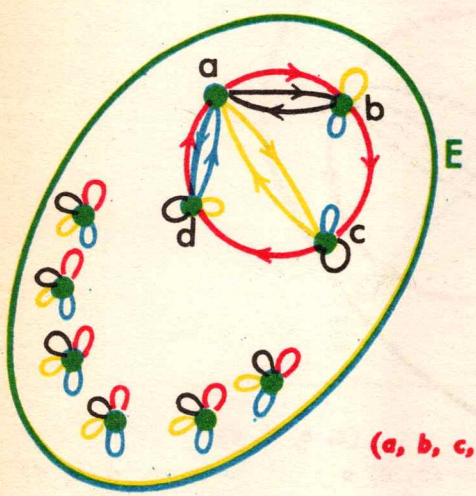


$(a, b, c) = (a, c) \circ (a, b)$

GRÁFICO 100

6. Sean a, b, c, d elementos distintos del conjunto E. ¿Quieres justificar la fórmula

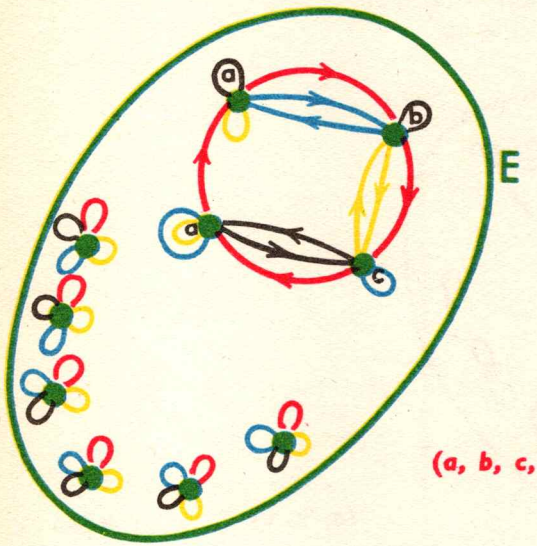
$$(a, b, c, d) = (a, d) \circ (a, c) \circ (a, b).$$



$(a, b, c, d) = (a, d) \circ (a, c) \circ (a, b)$

GRÁFICO 101

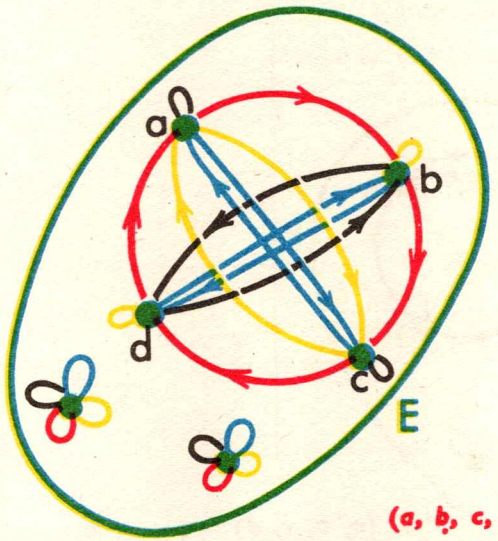
7. Con las mismas notaciones que en 6 justifica la fórmula
$(a, b, c, d) = (a, b) \circ (b, c) \circ (c, d)$.



$(a, b, c, d) = (a, b) \circ (b, c) \circ (c, d)$

GRÁFICO 102

8. Con las mismas notaciones que en los ejercicios precedentes, muestra que
$(a, b, c, d)^2 = (a, b, c, d) \circ (a, b, c, d) = (a, c) \circ (b, d) = (b, d) \circ (a, c)$.



(a, b, c, d)

$(a, b, c, d)^2 = (b, d) \circ (a, c) = (a, c) \circ (b, d)$

GRÁFICO 103

9. Sírvete de un gráfico para justificar estas fórmulas:

$(a, b, c, d)^3 = (a, b, c, d)^2 \circ (a, b, c, d) = (d, c, b, a) = (a, b, c, d)^{-1}$.

$(a, b, c, d)^4 = 1_E$.

Puedes deducir que

$(a, b, c, d)^{17} = (a, b, c, d)$.

Calcula $(a, b, c, d)^{1.000.001}$

¿Qué valen $(a, b, c, d)^{19}$, $(a, b, c, d)^6$?

10. ¿Puedes representar como compuesta de ciclos la permutación que impuso nuestro profesor (gráfico 97)?

A este efecto representarás por $a, b, c, d \ldots$ los diferentes lugares de la clase.

11. He aquí una permutación

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 7 & 8 & 6 & 9 & 3 & 1 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Ayudándote con un gráfico, ¿quieres presentarla como composición de ciclos?

(*Respuesta*: $p = (1, 2, 7) \circ (3, 8, 4, 6) \circ (5, 9)$).

12. Descompone en ciclos la permutación

$$p = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h & k & l & m & n \\ c & l & a & f & n & e & k & g & h & m & b & d \end{pmatrix}$$

13. Se llama **transformación en E** a toda función $E \to E$.

El gráfico siguiente define una transformación t en E muy especial.

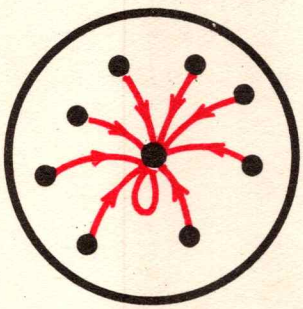
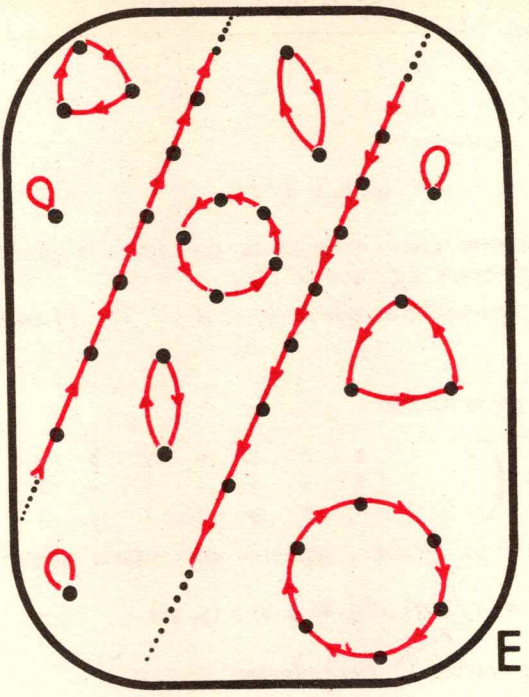


GRÁFICO 104

No existe transformación s en E tal que $s \circ t = 1_E$.

No existe transformación u en E tal que $t \circ u = 1_E$.

14 El gráfico que vemos aquí define una permutación infinita.



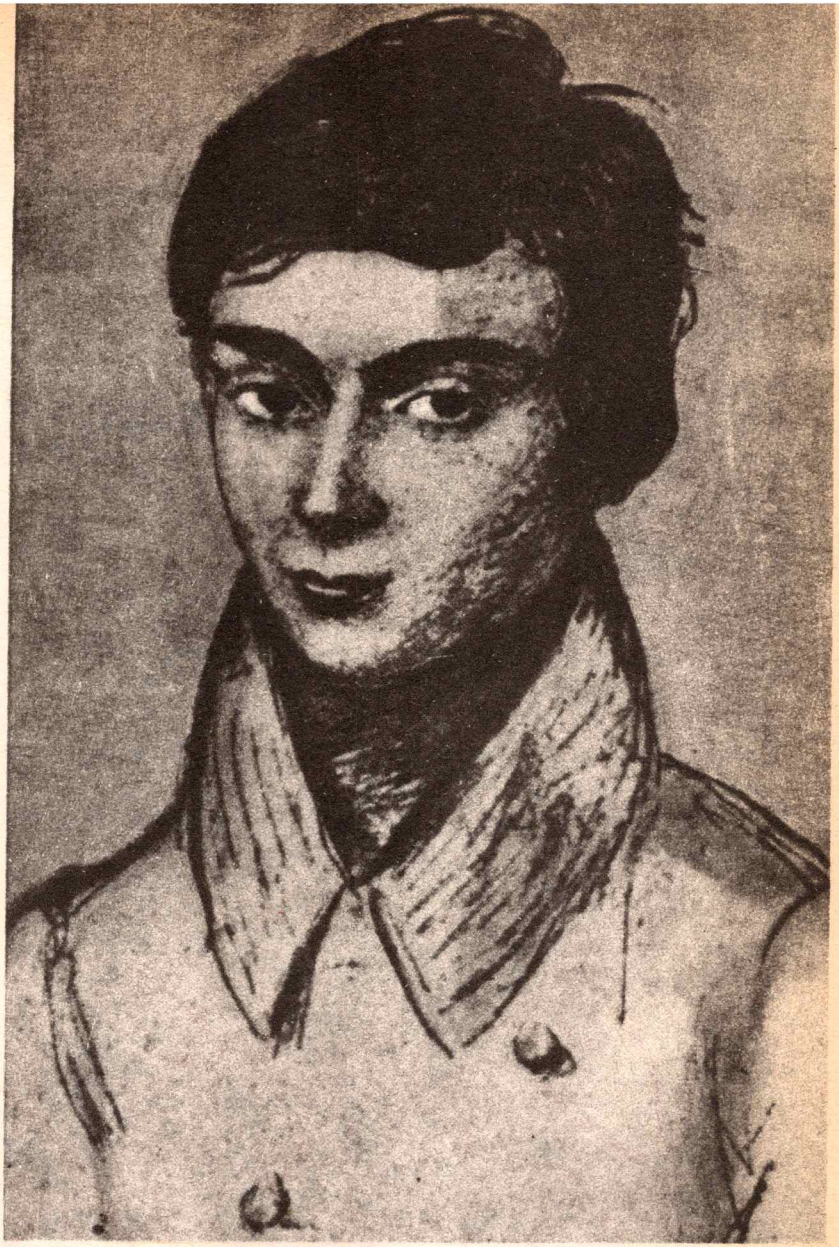
PERMUTACIÓN INFINITA

GRÁFICO 105

15. Si f, $g \in \mathfrak{S}S$, existe una, y solo una, permutación $x \in \mathfrak{S}E$ y una, solo una, permutación $y \in \mathfrak{S}E$, tales que

$$f \circ x = g = y \circ f .$$

(*Respuestas:* $x = f^{-1} \circ g$, $y = g \circ f^{-1}$.)



Evariste GALOIS
(1811-1832)

Evariste Galois es una de las figuras más patéticas de la historia de la matemática.

Este hijo de un alcalde de una pequeña localidad de los alrededores de París reveló desde su más joven edad gran inteligencia matemática. Su genio, muy avanzado con respecto a su época, y su carácter entero debían llevarlo a ser rechazado dos veces en el examen de ingreso de la Escuela Politécnica. No consiguió jamás, en vida, hacer reconocer sus méritos. De las varias memorias que presentó a la Academia, muchas se dejaron perder y ninguna fue comprendida

Participó con toda su fe democrática en el movimiento revolucionario francés de 1830, lo que le valió ser encarcelado dos veces; la segunda, durante seis meses.

El 30 de mayo de 1832, debido a un asunto que ha quedado en el misterio, se batió a duelo y murió al día siguiente.

En la noche anterior al 30 de mayo debía hacer un último esfuerzo afiebrado para legar al mundo sus descubrimientos matemáticos. Sus papeles, preciosamente conservados por su amigo Auguste Chevalier, contenían las grandes ideas de las teorías de los grupos, que han resultado esenciales para la matemática y la física de hoy.

14

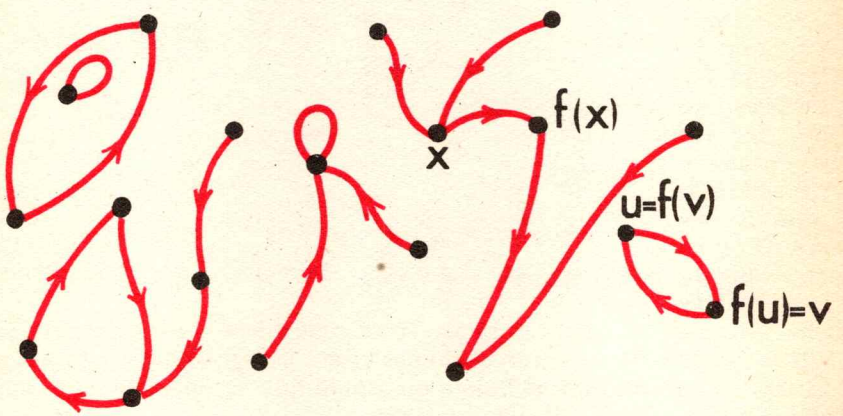
Transformaciones en el plano

1 — DEFINICIÓN

Se llama ***transformación*** *en* Π *toda función de* $\Pi \to \Pi$.

Si f es una transformación en Π, de todo punto de Π parte una, y solo una, flecha del gráfico de f.

Como Π es infinito, no podremos dibujar todos los puntos de Π ni todas las flechas de f.



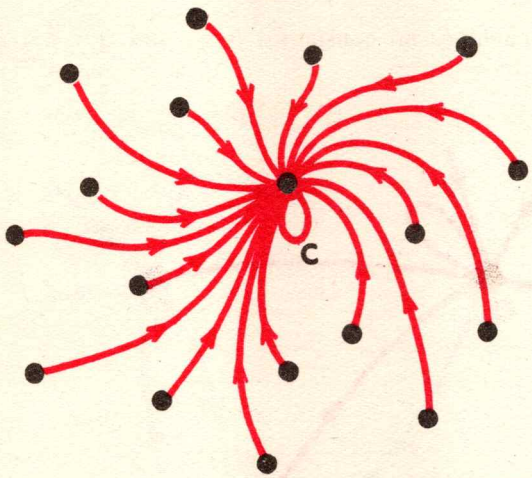
ALGUNAS FLECHAS DE UNA TRANSFORMACIÓN **f** DE Π.

GRÁFICO 106

2 — LAS TRANSFORMACIONES CONSTANTES

Sea $c \in \Pi$.

Haciendo partir de todo punto de Π una flecha que llegue a c, definimos una transformación en Π que se llama transformación constante.



LA TRANSFORMACIÓN CONSTANTE **c**

GRÁFICO 107

EJERCICIOS

1. Sean a, $b \in \Pi$.

   Designemos también por a y b las transformaciones constantes definidas por a y b.

   Para todo $x \in \Pi$, se tendrá, entonces,

   $$a(x) = a, \qquad b(x) = b.$$

   ¿Cuáles son las compuestas $a \circ b$ y $b \circ a$?

   Observa que $a(b) = a$ y $a \circ b = a$.

2. Sea $a \in \Pi$ y P una parte no vacía de Π. ¿Cuál es la imagen de P por la transformación constante a?

   ¿Cuáles son las imágenes de Π y de ϕ por esta transformación?

3. Sea f una transformación cualquiera en Π.

   Sea $a \in \Pi$ y designemos también por a la transformación constante definida por dicho punto.

   ¿Quieres mostrar que $a \circ f = a$?

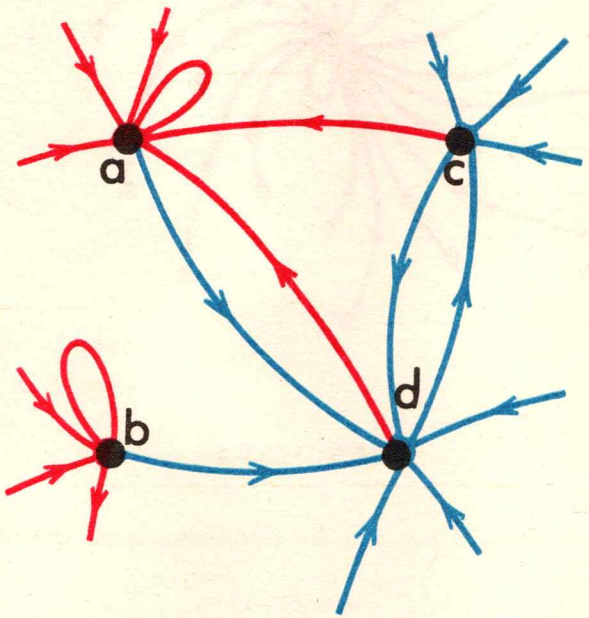
   Muestra también que $f \circ a$ es la transformación constante definida por el punto $f(a)$.

   ¿Quieres argumentar a favor de la fórmula $f \circ a = f(a)$?

4. Sean g, h transformaciones en Π. Si una de ellas es constante las compuestas $g \circ h$ y $h \circ g$ son constantes.

5. ¿Quieres dar dos transformaciones f y g en el plano Π, ambas no constantes y tales que $f \circ g$ sea constante?

6. He aquí transformaciones no constantes f, g, tales que $f \circ g$ y $g \circ f$ son constantes.



f, g NO CONSTANTES

$f \circ g = a$; $\quad g \circ f = d$

GRÁFICO 108

Para definir estas transformaciones f y g fijamos 4 puntos $a, b, c, d \in \Pi$.
Todas las flechas de f llegan, sea a a, sea a b. En particular

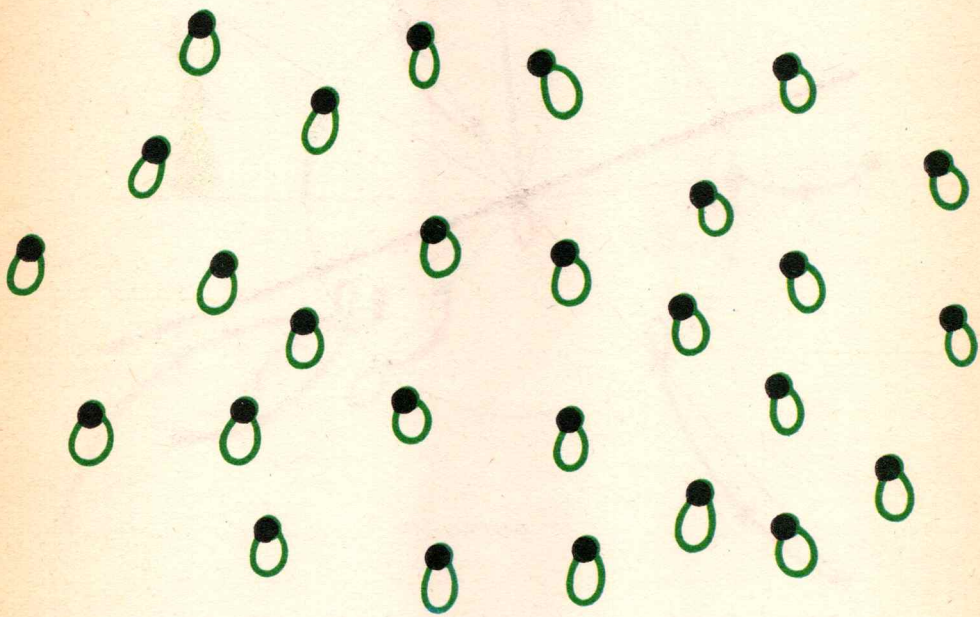
$$f(c) = f(d) = a.$$

Todas las flechas de g llegan, sea a c, sea a d.
En particular, $g(a) = g(b) = d$.
Explica y muestra que son correctas las fórmulas $f \circ g = a$, $g \circ f = d$.

3 – LA TRANSFORMACIÓN IDÉNTICA

Si dibujamos un lazo en todo punto de Π definimos una transformación en Π llamada transformación idéntica en Π. Vamos a designarla por ε o por 1_π.

Tenemos entonces $\varepsilon(x) = x$ para todo $x \in \Pi$.



ALGUNOS LAZOS DE TRANSFORMACIÓN IDÉNTICA

$1_\pi : \Pi \to \Pi : x \to x.$

GRÁFICO 109

EJERCICIOS

1. Para toda transformación f en el plano Π se tiene
$$f \circ 1_\pi = 1_\pi \circ f = f.$$

2. La transformación idéntica es igual a su recíproca.

3. Sea f una transformación en el plano. Te dicen que $f \circ f = 1_\pi$. Muestra que $f = f^{-1}$.

4 — UNA TRANSFORMACIÓN MÁS EN Π

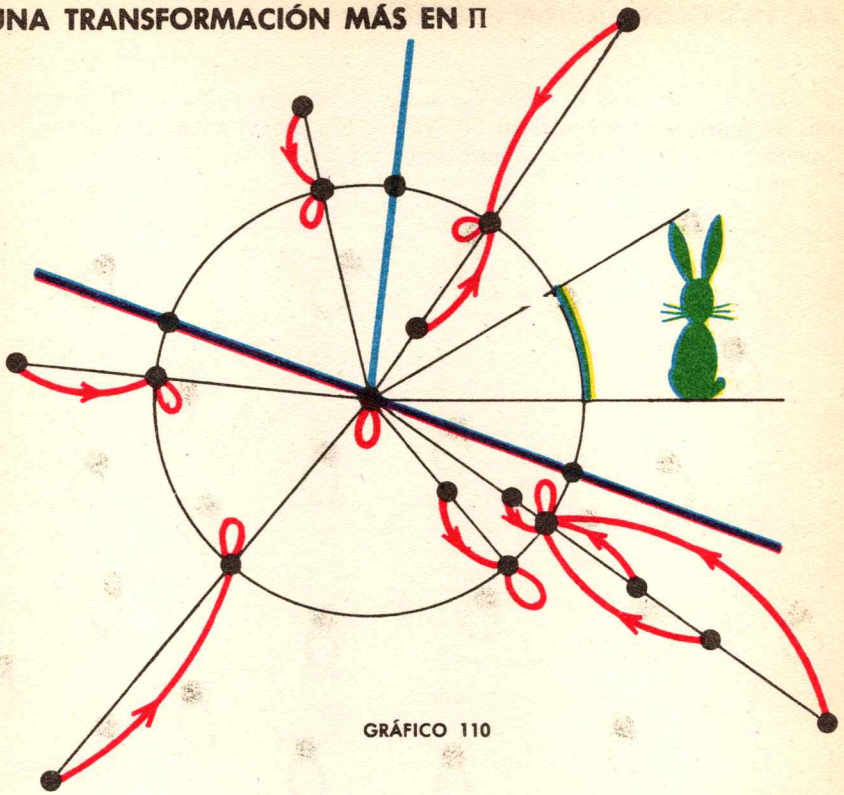
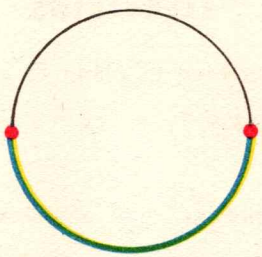


GRÁFICO 110

Define la transformación sugerida por el gráfico anterior.
¿Cuál es la imagen del conejo verde por esta transformación?
¿Cuál es la imagen de la semirrecta abierta azul?
La imagen de la recta violeta es un conjunto de 3 puntos.

EJERCICIO

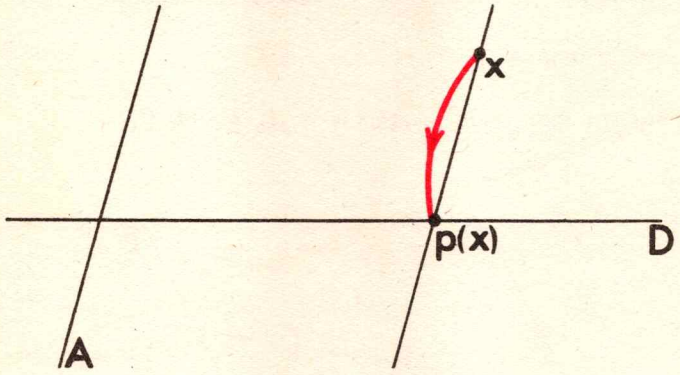


¿Cuál es la imagen de la recta verde por la transformación definida en el gráfico 110?

5 — PROYECCIÓN PARALELA

Sean D y A rectas secantes.

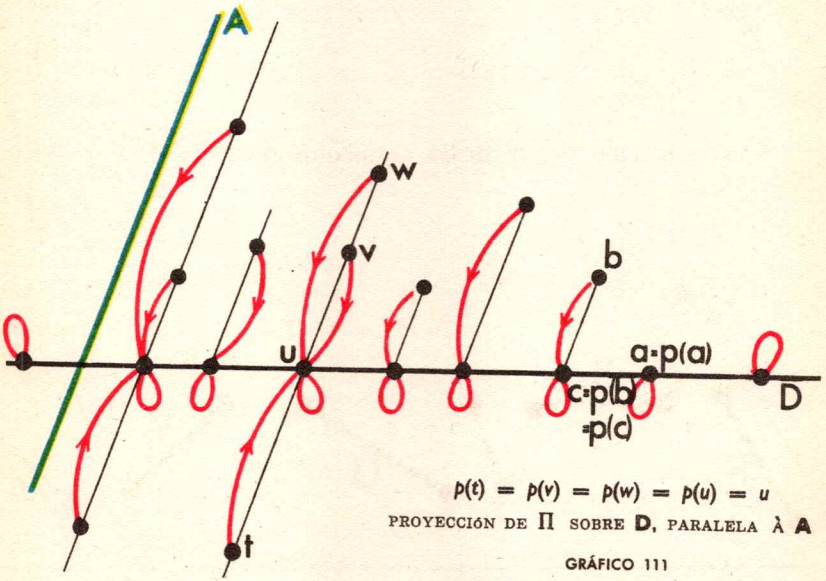
En virtud del axioma de Euclides todo punto $x \in \Pi$ pertenece a una, y solo una, paralela en A, que vamos a llamar X.



X = la paralela a A que contiene a x

Se tiene, pues, $D \nparallel A \parallel X$; luego $D \nparallel X$ y, por tanto, $D \cap X$ es un conjunto unitario.

Haciendo $D \cap X = \{p(x)\}$, definimos la transformación p en Π llamada **proyección de Π sobre D, paralela a A.**



$p(t) = p(v) = p(w) = p(u) = u$

PROYECCIÓN DE Π SOBRE **D**, PARALELA À **A**

GRÁFICO 111

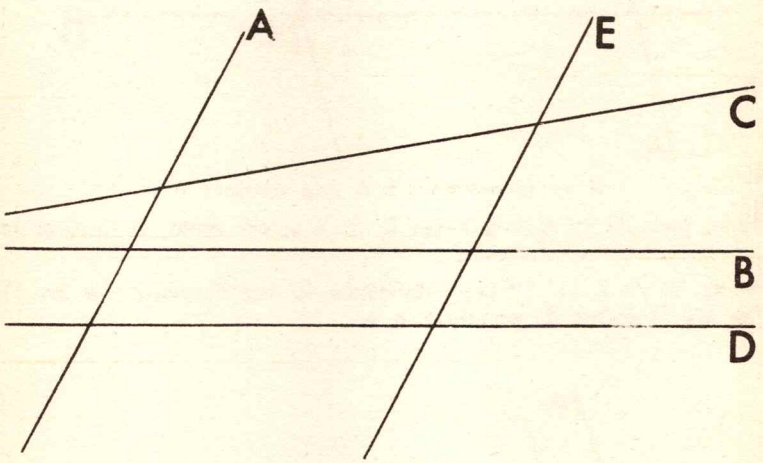
EJERCICIOS

En los ejercicios siguientes, p *designa la proyección de* Π *sobre D, paralela a A.*

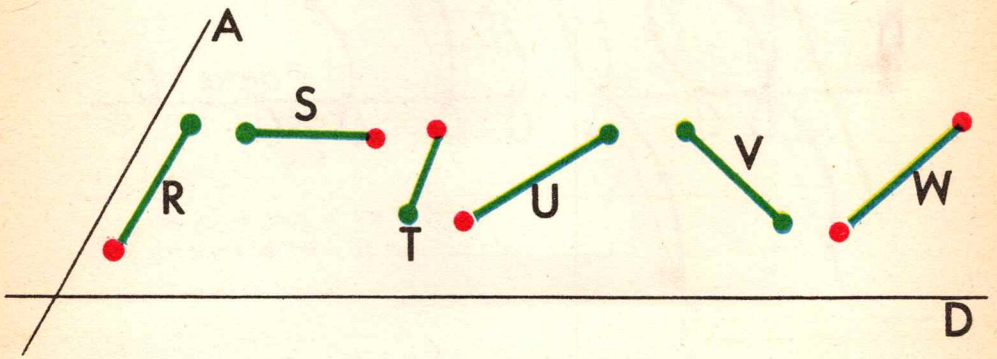
1. ¿Por qué la transformación p no es una permutación?

2. Muestra que $p \circ p = p$.

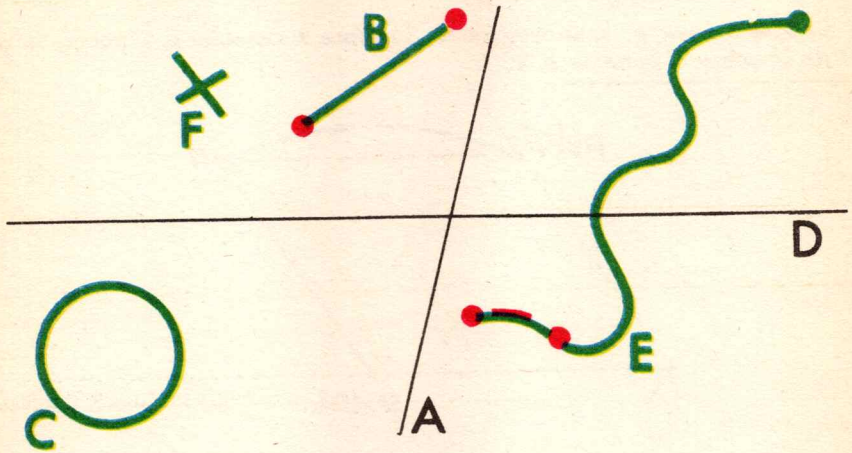
3. Busca la imagen por p de las rectas A, B, C, D, E.



4. ¿Cuál es la imagen por p de los segmentos R, S, T, U, V y W?



5. ¿Cuáles son las imágenes por p de los conjuntos A, B, C, D, E y F?

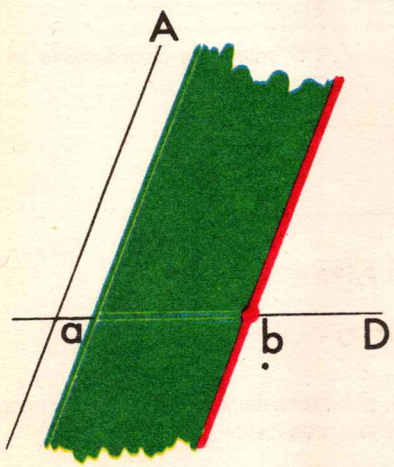


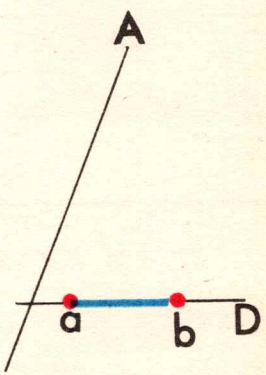
6. Sea $d \in D$. El conjunto de los puntos de Π cuya imagen por p es d, la paralela a A que contiene a d.

7. Sea $x \in \Pi$. El conjunto de los puntos de Π que tienen la misma imagen por p que x es la paralela a A que contiene a x.

8. Sea $[ab]$ un segmento incluido en D.
¿Cuál es la parte más grande de Π cuya imagen por p es $[ab]$?

9. La misma pregunta cambiando $[ab]$ por $[ab[$, por $]ab]$ y por $]ab[$.

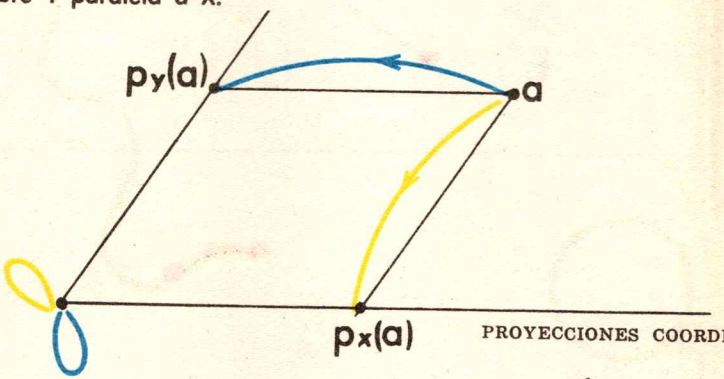




6 — PROYECCIONES COORDENADAS

Sean X e Y dos rectas secantes.

Designemos por p_x la proyección de Π sobre X paralela a Y por p_y la proyección de Π sobre Y paralela a X.



PROYECCIONES COORDENADAS

GRÁFICO 112

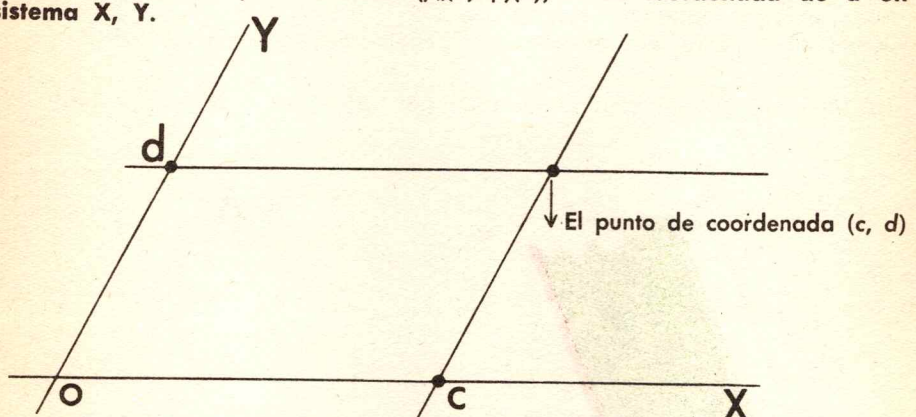
Todo punto $a \in \Pi$ define el par ordenado

$$(p_x(a),\ p_y(a)) \in X \times Y.$$

Recíprocamente, para todo par ordenado $(b, c) \in X \times Y$, existe un punto, y solo uno, $u \in \Pi$ tal que

$$(p_x(u),\ p_y(u)) = (b,\ c)$$

Se dice que el par ordenado $(p_x(a),\ p_y(a))$ es **la coordenada de a en el sistema X, Y.**



$\Pi \to X \times Y : a \to (p_x(a),\ p_y(a))$ ES UNA BIYECCIÓN.

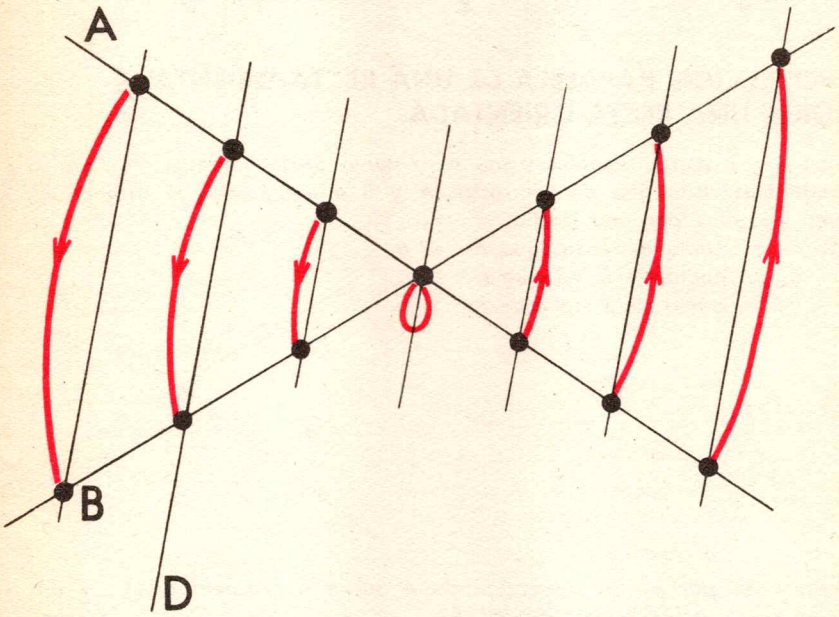
EJERCICIO

Las compuestas $p_x \circ p_y$ y $p_y \circ p_x$ (transformaciones no constantes p_x y p_y) son iguales a la transformación constante o.

7 — PROYECCIÓN PARALELA DE UNA RECTA SOBRE UNA RECTA

Sean A, B, D rectas de Π tales que $A \# D \# B$.

Toda paralela a D corta a A y a B. Así se obtiene una biyección $p : A \to B$ llamada **proyección de A sobre B, paralela a D.**



PROYECCIÓN DE **A** SOBRE **B** PARALELA A **D**

GRÁFICO 113

15

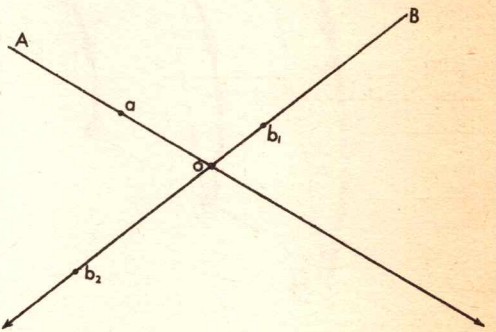
Proyecciones paralelas y orden

1 — PROYECCIÓN PARALELA DE UNA RECTA ORIENTADA SOBRE UNA RECTA ORIENTADA

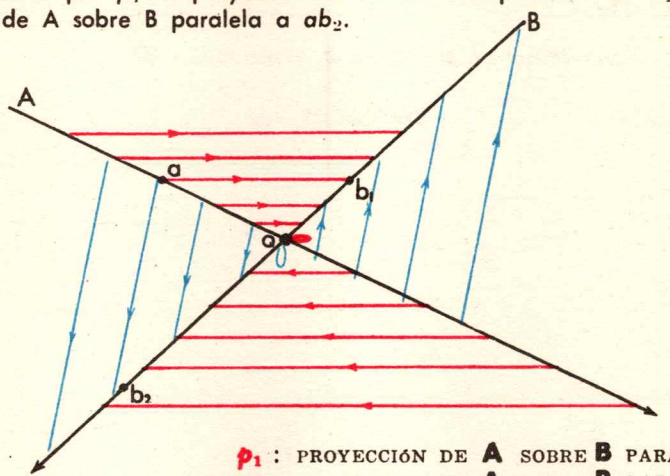
Sean A y B rectas secantes y sea o su punto de intersección: $A \cap B = \{o\}$.

Orientemos cada una de las rectas A y B e indiquemos el orden elegido en cada una de ellas por una flecha.

Sea a un punto de A tal que $a < o$,
b_1 un punto de B tal que $b_1 < o$,
b_2 un punto de B tal que $b_2 > o$.



Designemos por p_1 la proyección de A sobre B paralela a ab_1 y por p_2 la proyección de A sobre B paralela a ab_2.



p_1 : PROYECCIÓN DE **A** SOBRE **B** PARALELA A ab_1
p_2 : PROYECCIÓN DE **A** SOBRE **B** PARALELA A ab_2

GRÁFICO 114

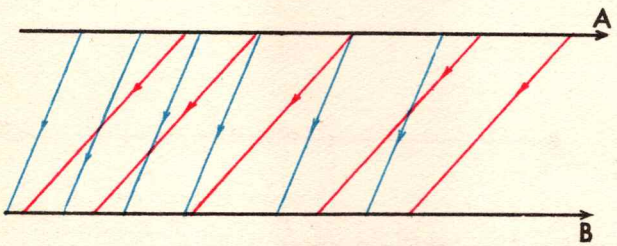
Sean x e y dos puntos de A. Comprobamos que

$$x < y \Rightarrow p_1(x) < p_1(y)$$
$$x < y \Rightarrow p_2(x) > p_2(y).$$

Expresaremos *estos hechos* diciendo que la proyección p_1 **conserva** el orden mientras que la proyección p_2 lo **invierte.**

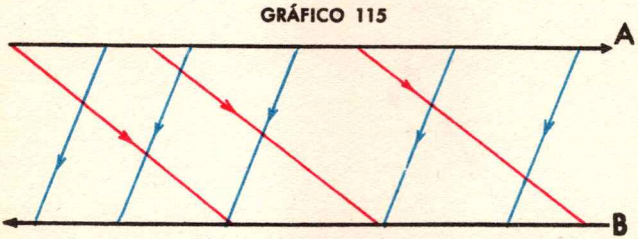
Si A ∦ B, ciertas proyecciones paralelas de A sobre B conservan el orden y otras lo invierten.

Examinemos la situación que presentan rectas A y B paralelas.



TODAS LAS PROYECCIONES PARALELAS CONSERVAN EL ORDEN

GRÁFICO 115



TODAS LAS PROYECCIONES PARALELAS INVIERTEN EL ORDEN

GRÁFICO 116

Comprobamos que si dos rectas orientadas A y B son paralelas se presentan dos casos:

1. Todas las proyecciones paralelas de A sobre B conservan el orden.
2. Todas las proyecciones paralelas de A sobre B invierten el orden.

AXIOMA Π 8 — *1. Si A y B son rectas orientadas, toda proyección paralela de A sobre B conserva el orden o invierte el orden.*

2. Si A y B son rectas orientadas paralelas, se presentan dos casos:

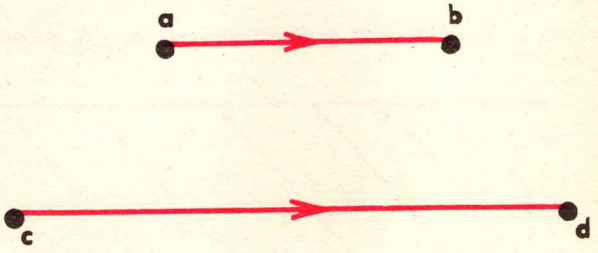
a) *Todas las proyecciones paralelas de A sobre B conservan el orden; se dice entonces que las rectas orientadas A y B tienen el mismo sentido.*

b) *Todas las proyecciones paralelas de A sobre B invierten el orden; se dice entonces que las rectas orientadas A y B son de sentidos contrarios.*

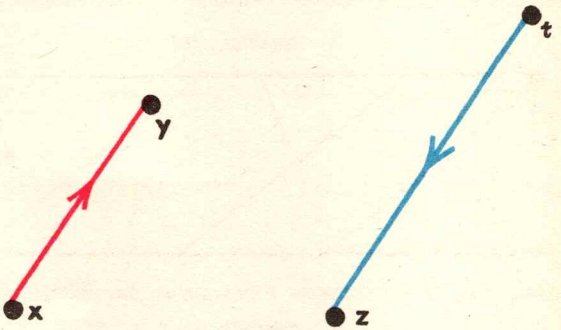
2 — PARES ORDENADOS PARALELOS

Sean a, b, c, d cuatro puntos diferentes de Π tales que $ab \parallel cd$.

Si al decidir $a < b$ y $c < d$, las rectas orientadas ab y cd tienen el mismo sentido, diremos que los pares ordenados (a, b) y (c, d) son del mismo sentido.



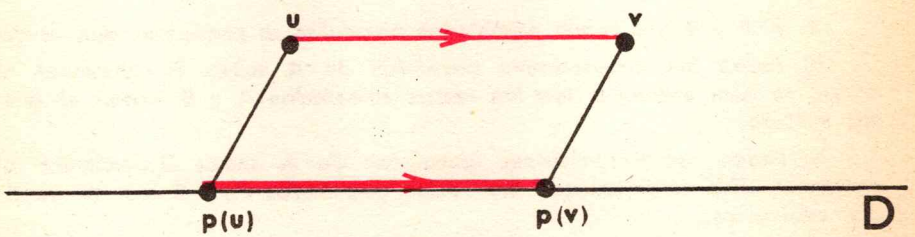
LOS PARES ORDENADOS PARALELOS (a, b) Y (c, d) TIENEN EL MISMO SENTIDO



LAS CUPLAS PARALELAS (x, y) Y (t, z) TIENEN SENTIDOS OPUESTOS

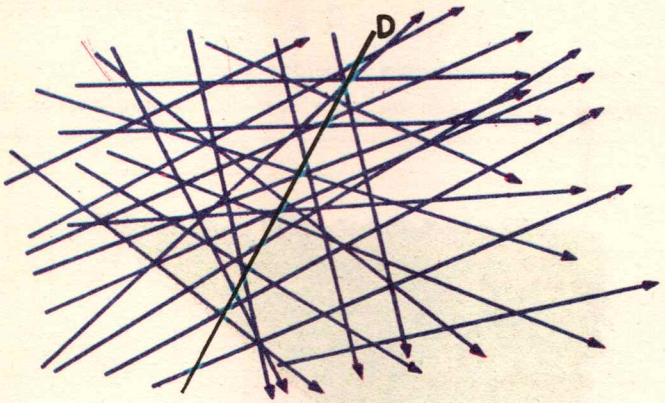
Sean u, v puntos diferentes tales que $uv \parallel D \in \mathfrak{D}$.

Si proyectamos paralelamente Π sobre D por la proyección p,
entonces los pares ordenados $(p(u), p(v))$ y (u, v) tendrán el mismo sentido.



3 — SEMIPLANOS

Tenemos una recta D. El axioma Π 8 nos permite orientar todas las rectas *no paralelas a D* de manera tal que toda proyección paralela a D de una de esas rectas sobre otra de ellas conserve el orden.



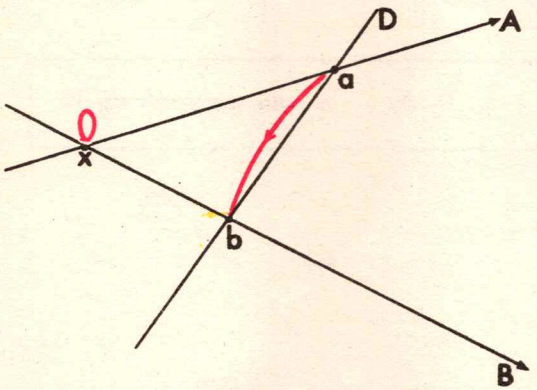
Elige un punto $x \in \Pi \setminus D$.

Llama A y B a dos de las rectas que acabamos de orientar que contengan al punto x.

Sea $A \cap D = \{a\}$ y $B \cap D = \{b\}$.

Si $x < a$ en A, se tendrá $x < b$ en B, puesto que la proyección paralela a D conserva el orden.

Escribiremos en ese caso $x < D$.



p : PROYECCIÓN DE **A** SOBRE **B**, PARALELA A **D**

$$x < a \quad \Rightarrow \quad x = p(x) < p(a) = b.$$

GRÁFICO 117

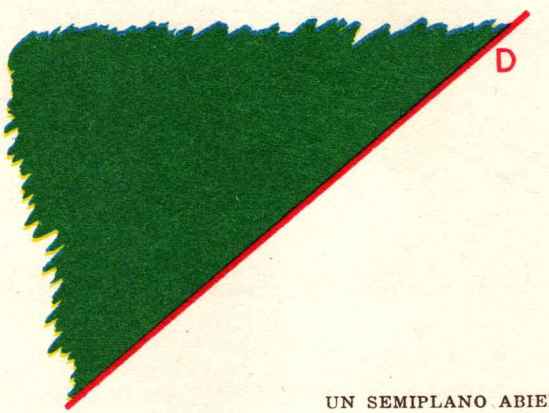
Del mismo modo, si $a < x$, se tendrá $b < x$ y se escribirá $D < x$.

DEFINICIÓN 1 — *Los conjuntos*

$$\Delta_1 = \{ x \in \Pi \mid x < D \}$$
$$\Delta_2 = \{ x \in \Pi \mid D < x \}$$

se llaman ***semiplanos abiertos*** *definidos por D.*

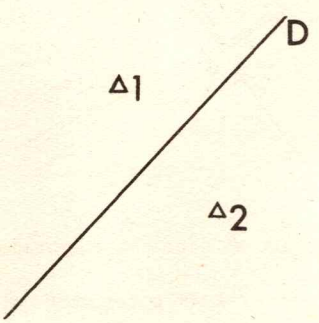
La recta D es el ***borde*** *de cada uno de los* ***semiplanos*** Δ_1, Δ_2.



UN SEMIPLANO ABIERTO DE BORDE **D**

Como todo punto de Π pertenece a uno, y solo uno, de los tres conjuntos no vacíos Δ_1, D, Δ_2

$\{ \Delta_1, \mathbf{D}, \Delta_2 \}$ **es una partición de** Π



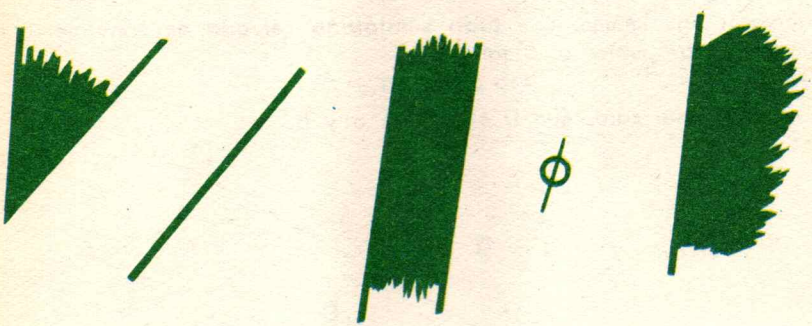
DEFINICIÓN 2 — *Se llama* ***semiplano cerrado (de borde D)*** *la unión de D y uno de los semiplanos abiertos definidos por D.*

Así $\Delta_1 \cup D$ y $\Delta_2 \cup D$ son los *semiplanos cerrados* de borde D.

SEMIPLANO CERRADO DE BORDE **D**

EJERCICIOS

1. ¿Quieres representar la intersección de 2 semiplanos cerrados, de dos semiplanos abiertos, de un semiplano cerrado y de un semiplano abierto abarcando las diversas situaciones posibles?



INTERSECCIONES DE SEMIPLANOS CERRADOS.

¡Explica y justifica!

2. Si M es un semiplano abierto, $\Pi \setminus M$ es un semiplano cerrado del mismo borde que M.

3. Para toda recta D el conjunto $\Pi \setminus D$ es la unión de los dos semiplanos abiertos definidos por D.

4. ¿Cuál es la intersección de los 2 semiplanos cerrados definidos por la recta D?

5. ¿Cuál es la unión de los 2 semiplanos cerrados definidos por la recta D?

4 — SEMIPLANOS DEFINIDOS POR UNA RECTA

— Traza una recta D e indica los dos semiplanos abiertos Δ_1, Δ_2 de borde D.
Marca dos puntos *u*, *v* que pertenezcan a uno de estos semiplanos (por ejemplo, a Δ_1).
¿Qué puedes decir del segmento [*uv*]?

— $[uv] \subset \Delta_1$.

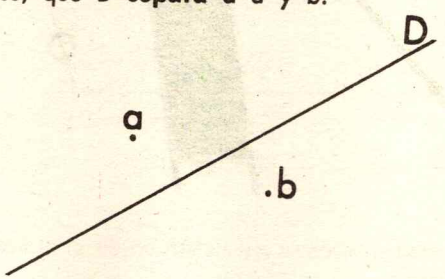
— Todo segmento cuyos extremos pertenecen a un semiplano abierto está incluido en ese semiplano.
¿Cómo expresar esta propiedad?

— **Todo semiplano abierto es convexo.**

— Observarás, igualmente, que **todo semiplano cerrado es convexo.**
Quieres marcar puntos *a*, *b* tales que

$$a \in \Delta_1, \quad b \in \Delta_2.$$

Se dice, en este caso, que D **separa** a *a* y *b*.



D SEPARA *a* Y *b*

— ¿Qué puedes decir, en este caso, de] *a b* [y D?

— **La recta D corta al segmento abierto**] *a b* [.

— Dicho de otro modo: D ∩] *a b* [es un conjunto unitario.

Tengo, por último, dos puntos distintos *x*, *y* ε Π.

Te advierto que D corta a] *x y* [.

¿Cuál es, entonces, la situación respecto de D y *x*, *y*?

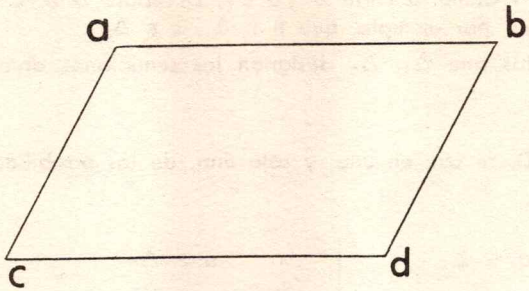
— D separa a *x*, *y*.

Reunamos las observaciones precedentes en el axioma Π 9.

AXIOMA Π 9 — ***Todo semiplano abierto o cerrado es convexo. La recta D corta a***] x y [***ssi la recta D separa a*** x, y.

5 — LAS DIAGONALES DE UN PARALELOGRAMO

Éste es un paralelogramo:



Las rectas *a b* y *c d* son disjuntas.

Las rectas *a c* y *b d* son disjuntas.

A partir del axioma Π 9 es posible demostrar que] *a d* [∩] *b c* [es un conjunto unitario.

Esto es lo que se expresa brevemente diciendo que las diagonales de un paralelogramo se cortan.

Para no aburrirte con esta demostración bastante delicada, pondremos este resultado como suplemento del axioma Π 9.

AXIOMA Π 9 (suplemento) — ***Las diagonales de un paralelogramo se cortan.***

6 — TEOREMA DE PASCH

Si una recta no contiene ninguno de los vértices de un triángulo y corta a uno de sus lados,

entonces esta recta corta a uno de los otros lados.

De manera precisa:

TEOREMA DE PASCH — **Sean *a*, *b*, *c* tres puntos no alineados y D $\in \mathfrak{D}$.**

a, *b*, *c* $\notin$ D **y** D **corta a**] *b* *c* [	$\Rightarrow$	D **corta a**] *b* *a* [**o** D **corta a**] *a* *c* [

DEMOSTRACIÓN: Como D corta a] *b* *c* [, D separa a *b*, *c*.

Convengamos, por ejemplo, que *b* $\in \Delta_1$, *c* $\in \Delta_2$

expresiones en las que Δ_1, Δ_2 designan los semiplanos abiertos definidos por D.

Como *a* $\notin$ D, se cae en una, y solo una, de las posibilidades

$a \notin \Delta_1$	$a \in \Delta_2$
Se tiene, entonces, $a \in \Delta_1$ y $c \in \Delta_2$ Dicho de otro modo: D separa a *c*, y en virtud del axioma Π 9, D corta a] *a* *c* [	(¡a completar por el lector!)

l. q. q. d.

EJERCICIOS

1. ¿Quieres representar la intersección de 3 semiplanos cerrados considerando los distintos casos que pueden darse?

Intersección de tres semiplanos cerrados. ¡Explica y justifica!

¿Son convexas estas intersecciones? Justifica tu respuesta.

2. El mismo problema para el caso de tres semiplanos abiertos, para el caso de dos semiplanos abiertos y de un semiplano cerrado y para el caso de dos semiplanos cerrados y de un semiplano abierto.

3. Sean 3 puntos *a*, *b*, *c*. ¿Cuál es el conjunto convexo más pequeño que contiene los 3 puntos?
La misma pregunta para 4 y 5 puntos.

4. El axioma Π 9 puede demostrarse a partir de los axiomas (y proposiciones) anteriores. ¿Quieres tratar de hacerlo? (Este ejercicio es muy difícil.)

16

Cardinales

1 — EQUIPOTENCIA

En el escenario del teatro, un alegre conjunto inicia una danza popular.

Cada muchacho toma de la mano a una joven fresca y sonriente.

Luego, sin soltarse, comienzan a moverse en todos los sentidos. Por cierto que no podríamos contarlos en medio de una danza tan movida.

Y sin embargo, ¿no sabemos que hay tantas mujeres como varones?

¿Por qué lo sabemos?

Porque el gesto inicial de esos muchachos hacia esas jóvenes ha establecido una **biyección.**

$$V \rightarrow M$$

DEFINICIÓN 1 — *Se dice que los conjuntos E y F son* ***equipotentes*** *o que tienen el* ***mismo número de elementos*** *o que tienen el* ***mismo cardinal*** *ssi existe una biyección* $E \rightarrow F$.

Se escribe entonces $E \# F$ o, más frecuentemente,

$$\# E = \# F$$

(Leer: cardinal de E = cardinal de F).

$A \# B \iff$ existe una biyección $A \rightarrow B \iff \# A = \# B$

Vamos a probar que la relación $\#$ es una **equivalencia**, es decir, una relación *reflexiva, transitiva, simétrica.*

— Ocupémonos primero de la **reflexividad.**

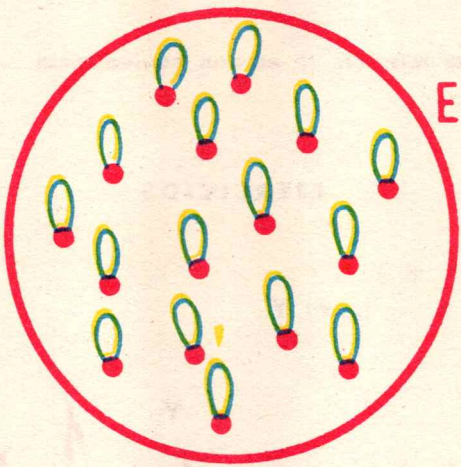
Debemos probar que para todo conjunto E se tiene $E \# E$.

En virtud de la definición de $\#$ que hemos dado,

$$E \# E \iff \textit{existe una biyección } E \to E.$$

¿Conoces una biyección $E \to E$?

— La *transformación idéntica* $E \to E : x \to x$ es una biyección $E \to E$, **lo que prueba la reflexividad de** $\#$.



LA TRANSFORMACIÓN IDÉNTICA $E \to E$

GRÁFICO 118

— Ocupémonos de la **transitividad.**

— Debemos probar que

$$A \# B \text{ y } B \# C \Rightarrow A \# C.$$

— ¿Quieres traducir las fórmulas $A \# B$, $B \# C$, $A \# C$ haciendo uso de la definición 1?

— $A \# B \iff$ *existe una biyección* $A \to B$.
$B \# C \iff$ *existe una biyección* $B \to C$.
$A \# C \iff$ *existe una biyección* $A \to C$.

— Debemos probar que si existen biyecciones $A \to B$ y $B \to C$ existe una biyección $A \to C$.

Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son biyecciones, ¿sabes de alguna biyección $A \to C$?

— Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son biyecciones, la compuesta $g \circ f$ es una biyección $A \to C$, **lo que prueba la transitividad de** $\#$.

— Falta probar la **simetría** de $\#$.

Debemos probar que

$$A \# B \Rightarrow B \# A.$$

— En virtúd de la definición 1 debemos demostrar que

existe una biyección $A \to B \Rightarrow$ *existe una biyección* $B \to A$.

— Si $f : A \to B$ es una biyección, ¿sabes de alguna biyección $B \to A$?

— Si f es una biyección $A \to B$, la recíproca f^{-1} es una biyección $B \to A$.

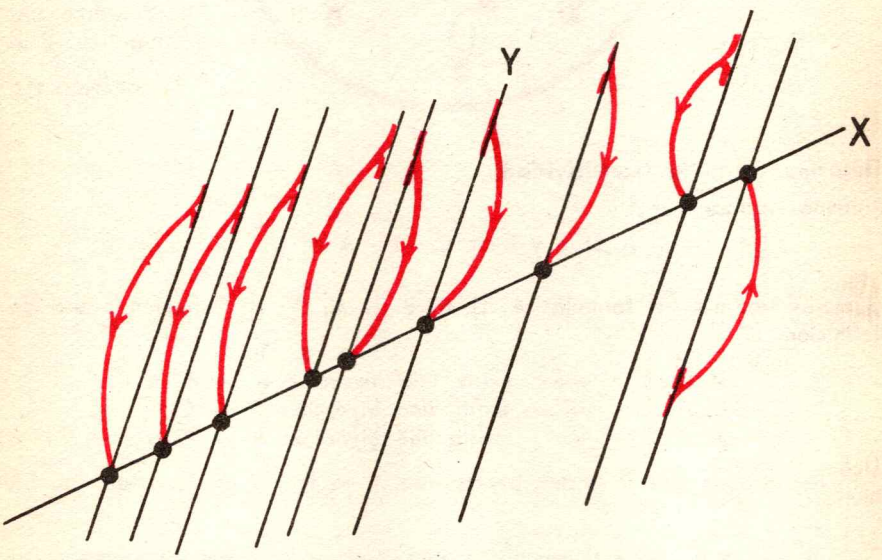
La simetría de $\#$ está, pues, probada.

Hemos probado sucesivamente que la relación $\#$ es reflexiva, transitiva, simétrica, que es lo que dice el teorema 1.

TEOREMA 1 — **La relación $\#$ es una equivalencia.**

EJERCICIOS

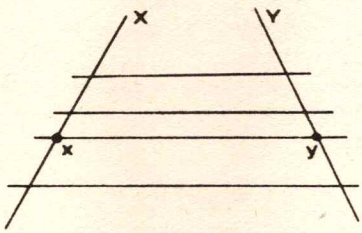
1. Sean las rectas $X \# Y$.
Muestra que $\# X = \# \textit{dir}\ Y$.



BIYECCIÓN DIR Y → X

GRÁFICO 119

2. *Todas las rectas tienen el mismo cardinal.*
Sean X, Y dos rectas dadas distintas.
Se debe probar que $\# X = \# Y$.
Sea $x \in X$, $y \in Y$ y $x \neq y$.
Se tiene, entonces, $X \# xy \# Y$,
y de aquí $\# X = \# dir\ xy = \# Y$.



3. Todas las direcciones tienen el mismo cardinal.
4. Dos segmentos cerrados que no se reducen a un punto tienen el mismo cardinal.

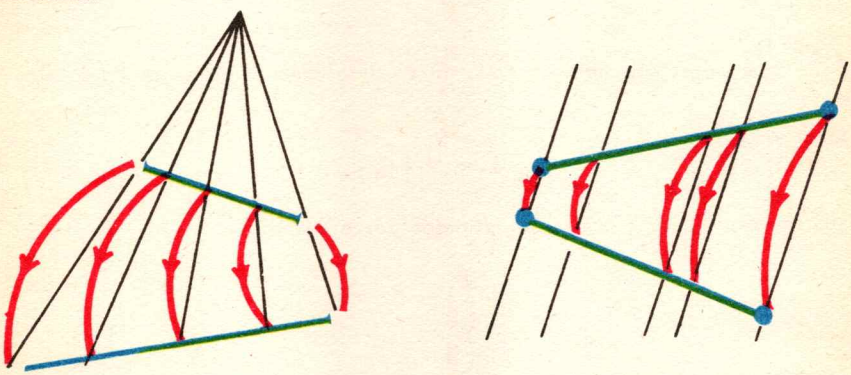
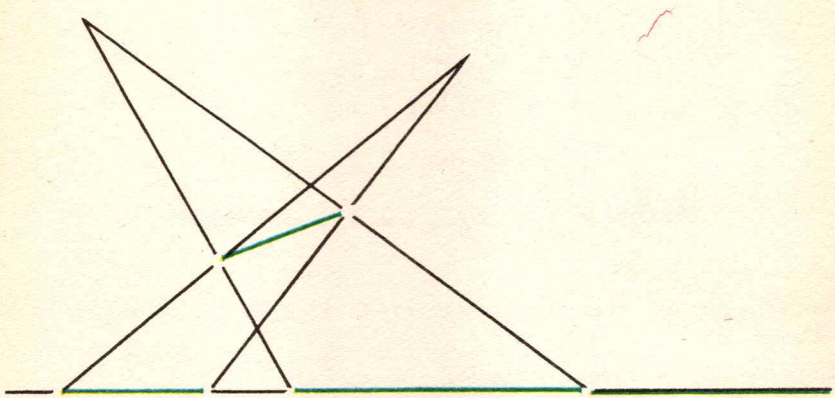


GRÁFICO 120



5. Demuestra que todas las semirrectas cerradas tienen el mismo cardinal.

2 — LOS NÚMEROS NATURALES

Todo conjunto equipotente con el conjunto vacío es vacío.

El cardinal del conjunto vacío se llama **cero**.

Escribamos:

$$\mathbf{0} = \#\,\phi\,.$$

Todos los conjuntos unitarios son equipotentes: *el cardinal de los conjuntos unitarios se llama* **uno** (y se indica por 1).

Así,

$$\mathbf{1} = \#\,\{\,0\,\}\,.$$

Como los conjuntos unitarios no son vacíos,

$$0 \neq 1\,.$$

y $\{\,0, 1\,\}$ es un par.

Todos los pares son equipotentes. *El cardinal de los pares se llama* **dos** (y se indica por 2).

En particular,

$$\mathbf{2} = \#\,\{\,0, 1\,\}\,.$$

Los números *0, 1, 2* han sido definidos por las fórmulas

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \#\,\phi \\ \mathbf{1} &= \#\,\{\,0\,\} \\ \mathbf{2} &= \#\,\{\,0, 1\,\} \end{aligned}$$

Continuemos la letanía:

$$\begin{aligned} \mathbf{3} &= \#\,\{\,0, 1, 2\,\} \\ \mathbf{4} &= \#\,\{\,0, 1, 2, 3\,\} \\ \mathbf{5} &= \#\,\{\,0, 1, 2, 3, 4\,\} \\ &\ldots \\ \mathbf{27} &= \#\,\{\,0, 1, 2, 3, \ldots, 26\,\} \\ &\ldots \\ \mathbf{1.000.000.000} &= \#\,\{\,0, 1, 2, 3, \ldots, 999.999.999\,\} \\ &\ldots \end{aligned}$$

Desde luego, admitirás que los números 0, 1, 2, 3, ... así definidos son distintos dos a dos.

Estos números se llaman **naturales**.

Su conjunto se designa por ω.

3 — CONJUNTOS INFINITOS

Se llama **conjunto finito** todo conjunto cuyo cardinal es un natural.

Se llama **conjunto infinito** todo conjunto no finito.

El conjunto ω es un conjunto infinito.

— ¿Quieres presentarnos otros conjuntos infinitos?

— El plano Π es un conjunto infinito de puntos.

Toda recta es un conjunto infinito de puntos.

Si a y b son puntos diferentes, $[ab]$ es un conjunto infinito de puntos.

$\mathfrak{D}$ es un conjunto infinito de rectas.

Para toda recta D : *dir* D es un conjunto infinito de rectas.

Para todo punto x, el conjunto $\mathfrak{D}_x$ de las rectas que contienen a x es infinito.

El conjunto $2\,\omega$ de los naturales pares es infinito.

EJERCICIO

Presenta 17 conjuntos infinitos muy diferentes.

4 — EL NÚMERO δ

Llamemos δ al cardinal de ω.

$$\delta = \#\,\omega = \#\{\,0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\,\}.$$

Sabemos que:

Dos conjuntos tienen el mismo cardinal ssi existe una biyección que aplica uno sobre el otro.

La aplicación $\omega \to 2\,\omega : x \to 2x$ es una biyección.

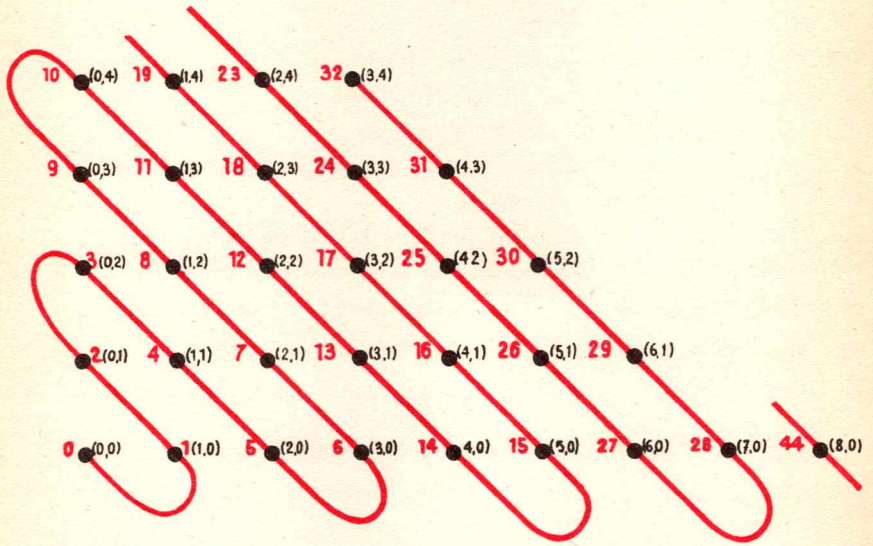
Luego $$\#\,2\,\omega = \#\,\omega = \delta.$$

Acabamos de ver que *el conjunto infinito ω tiene el mismo cardinal que una de sus partes propias.*

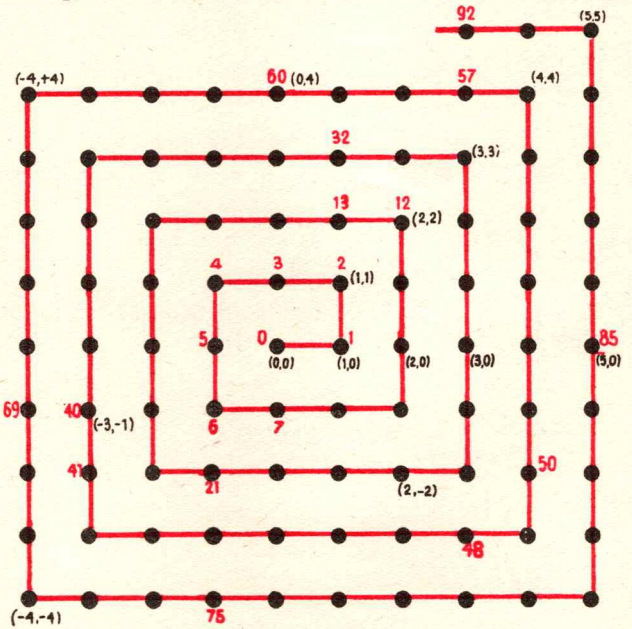
EJERCICIOS

1. $\#\,3\,\omega = \delta$
2. $\#\,127.281\,\omega = \delta$
3. $\#\,333{\cdot}333{\cdot}333{\cdot}333\,\omega = ?$
4. $\#\{\,1,\ 2,\ 3,\ \ldots\,\} = \delta$
5. $\#\{\,2,\ 3,\ 4,\ \ldots\,\} = ?$

6. $\#\{1.000.000.000, 1.000.000.001, 1.000.000.002, \ldots\} = ?$
7. $\#\{1, 2, \ldots, 1.000.000.000\} \neq \#\{0, 1, 2, \ldots, 1.000.000.000\}$
8. $1 = \#\{1\}$, $2 = \#\{1, 2\}$, $8 = \#\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
9. El esquema que vemos aquí muestra que $\#(\omega \times \omega) = \#\omega = \delta$.



10. El esquema siguiente muestra que $\#(Z \times Z) = \delta$.



11. ¿Quieres mostrar mediante un esquema que $\#(\omega \times Z) = \delta$.

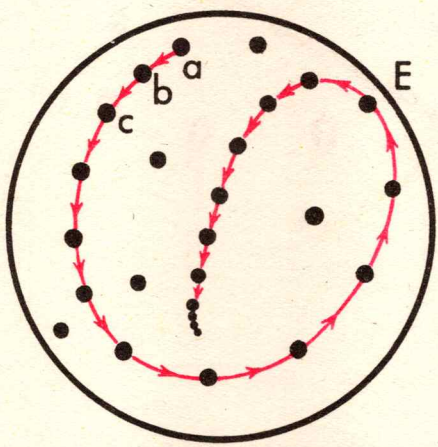
5 — TEOREMA DE DEDEKIND

Sea E un conjunto.

Si $E = \phi$, entonces E es finito.
Si $E \neq \phi$, sea $a \in E$.
Si $E \setminus \{a\} = \phi$, entonces $E = \{a\}$ y E es finito.
Si $E \setminus \{a\} \neq \phi$, sea $b \in E \setminus \{a\}$.
Si $E \setminus \{a, b\} = \phi$, entonces $E = \{a, b\}$ y E es finito.
Si $E \setminus \{a, b\} \neq \phi$, sea $c \in E. \setminus \{a, b\}$.

Vemos que un conjunto es **infinito** ssi se puede definir una letanía de nunca acabar que nosotros vamos a llamar **sigue-sigue** o **seguidilla**, como les guste más.

$$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow \ldots$$



SIGUE— SIGUE
GRÁFICO 121

DEFINICIÓN 2 — *Se llama* **seguidilla** *de origen* x_0 *definida en el conjunto E toda relación que satisface las condiciones siguientes:*

De x_0 *parte una sola flecha que llega a* $x_1 \neq x_0 \in E$
de x_1 *parte una sola flecha que llega a* $x_2 \notin \{x_0, x_1\} \subset E$
de x_2 *parte una sola flecha que llega a* $x_3 \notin \{x_0, x_1, x_2\} \subset E$
. . . etc. . . .

De aquí esta nueva definición de los conjuntos infinitos:

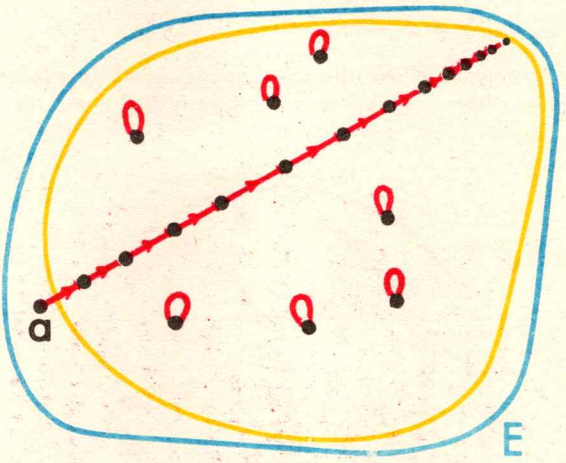
DEFINICIÓN 3 — *Un conjunto es* ***infinito*** *ssi se puede definir en él una seguidilla.*

PROPOSICIÓN 1 — *Todo conjunto infinito es equipotente con una de sus partes propias.*

DEMOSTRACIÓN: Sea E un conjunto infinito.

Definamos una seguidilla en E y sea *a* su primer elemento.

Adornemos con un lazo todo punto (eventual) de E del que no parta ninguna flecha de la seguidilla.



$E \# E \setminus \{a\}$

GRÁFICO 122

El gráfico así obtenido define una biyección $E \to E \setminus \{a\}$ lo que prueba que E es equipotente con su parte propia $E \setminus \{a\}$.

EJERCICIOS

1. Define una seguidilla en ω.
2. Define una seguidilla en $E \setminus \{a\}$ (ver gráfico 122).
3. Si E es infinito y $a \in E$: $\# E = \# (E \setminus \{a\})$.
4. Si E es infinito y $a, b, c \in E$: $\# E = \# (E \setminus \{a, b, c\})$.
5. Define una seguidilla en el plano Π.
6. Define una seguidilla en la recta D.
7. Define una seguidilla en *dir* D.

8. **Si** $a, b \in \Pi$ y $a \neq b$,
entonces : $\# [ab] = \# \,]ab[= \# \, [ab[= \# \,]ab]$.

9. Todas las semirrectas, abiertas o cerradas, tienen el mismo cardinal.

10. Si $a \neq c$, el segmento abierto $]ac[$ tiene el mismo cardinal que toda recta.

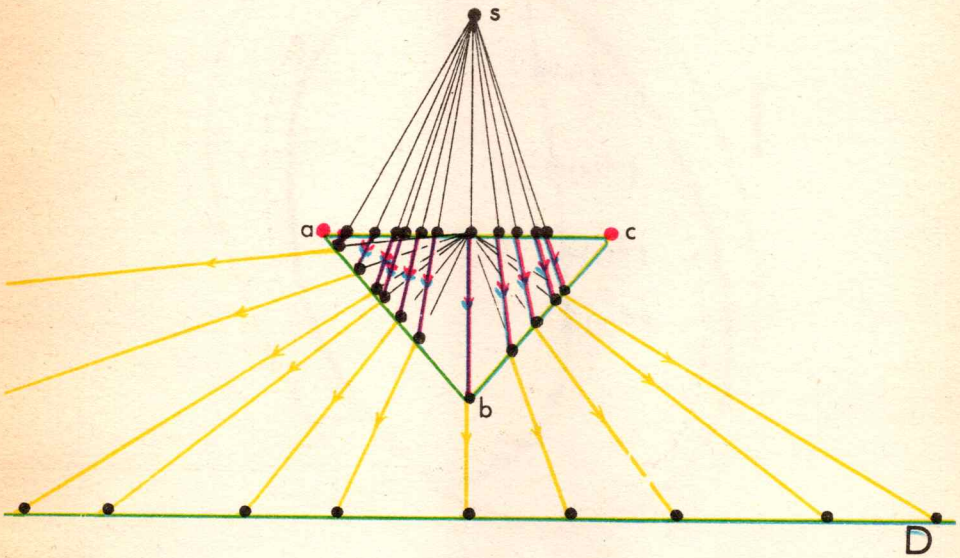


GRÁFICO 123

11. Todas las rectas,
todas las semirrectas, abiertas o cerradas,
todos los segmentos de extremos distintos, abiertos, semiabiertos, cerrados,
todas las direcciones... **tienen el mismo cardinal.**

PROPOSICIÓN 2 — *Todo conjunto equipotente con una de sus partes propias es infinito.*

DEMOSTRACIÓN: Sea E un conjunto equipotente con una de sus partes propias P.

Existe, pues, una biyeección $f : E \to P$.

Sea $x \in E \setminus P$.

$f(x) \in P$ y, por tanto, $f(x) \neq x$.

La biyección f aplica los dos puntos diferentes x, $f(x)$ en dos puntos diferentes $f(x)$, $f^2(x) = f(f(x))$ de P. Luego x, $f(x)$ y $f^2(x)$ son diferentes, etc.

Hemos construido una seguidilla en E, luego E es infinito.

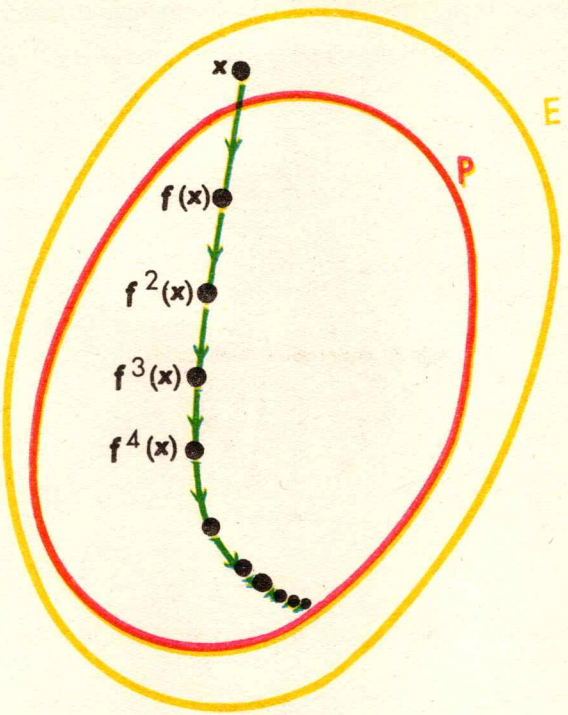


GRÁFICO 124

Reuniendo las proposiciones 1 y 2 obtenemos el

TEOREMA 2 **(Dedekind) — Un conjunto es infinito si es equipotente con una de sus partes propias.**

Del teorema de Dedekind resulta que *si* F *es un conjunto finito toda* **inyección** F → F *es una* **permutación** *en* F. En efecto:

Si la inyección *i* : F → F *no es suryectiva,*

entonces F es equipotente con su parte propia *i* F y, en virtud del teorema 2, F es infinito.

Como F es finito, la inyección *i* : F → F debe ser **suryectiva.**

La función *i* es, entonces, una **permutación** en F.

TEOREMA 3 — **Si F es un conjunto finito, toda inyección F → F es una permutación en F.**

6 — SANDWICHES

TEOREMA 4 — **Si un conjunto A es equipotente con una de sus partes, es equipotente con todo conjunto intermedio.**

$$A \supset B \supset C \text{ et } A \# C \Rightarrow A \# B$$

DEMOSTRACIÓN: Si $A = B$ se tiene evidentemente $A \# B$.

Supongamos, entonces, $A \neq B$ (luego $A \setminus B \neq \varphi$).

Como $A \# C$, existe una biyección $f : A \to C$.

La demostración del teorema precedente nos muestra que esta biyección define una seguidilla a partir de todo punto de $A \setminus B$.

Dibujemos en verde las seguidillas que comienzan en cuatro puntos de $A \setminus B$ (que *representarán*, para nosotros, **todos** los puntos de $A \setminus B$).

Como f es una biyección, dos flechas distintas de estas seguidillas no pueden llegar al mismo punto, por lo cual se da la situación que vemos aquí.

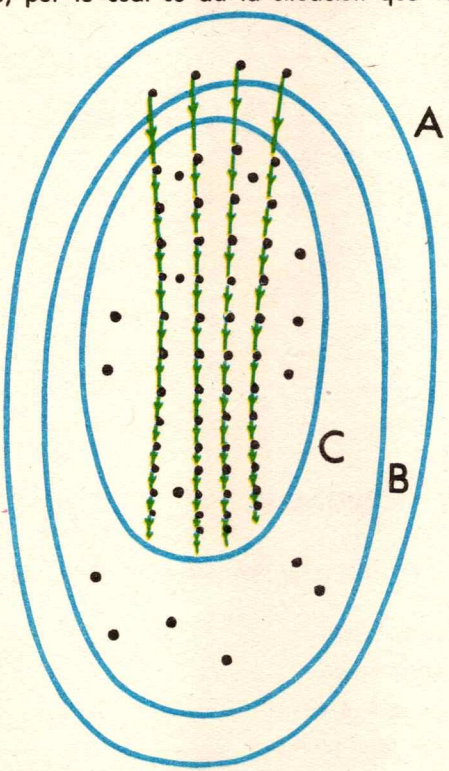


GRÁFICO 125

Vamos a construir en rojo una biyección $A \to B$.

Comenzamos por reproducir en rojo las seguidillas que parten de los puntos de $A \setminus B$.

Ciertos puntos de B no son alcanzados por estas seguidillas. Los adornamos con un lazo rojo.

De este modo se tiene, sin duda, una biyección A → B.

l. q. q. d.

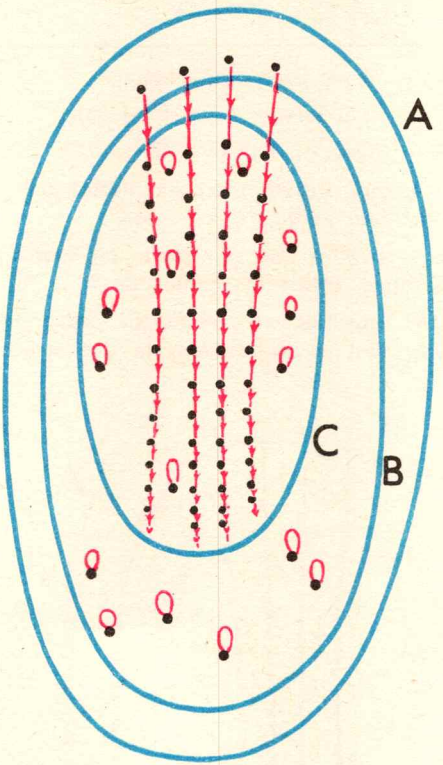


GRÁFICO 126

7 — ORDEN DE LOS CARDINALES

En la primera clase del año, cuando entramos en el aula, hubo un concierto de exclamaciones:

—¡No hay bastantes bancos!

—¡No hay bancos para todos!

—¡Hay más alumnos que bancos!

—¡Hay menos bancos que alumnos!

A nadie se le ocurrió contar los bancos o contar los alumnos. Sin embargo, sin temor de equivocarnos, afirmamos: *hay menos bancos que alumnos.*

—¿Por qué?

—Porque ciertos alumnos no pudieron sentarse por estar todos los bancos ocupados ya por sus condiscípulos.

—Designa por A el conjunto de los alumnos de la clase y por B el conjunto de los bancos que había en el aula. Todos los bancos fueron ocupados.

Así,

... está ocupado por ...

es una función $f : B \to A$.

¿Quieres dibujar un gráfico de esta función?

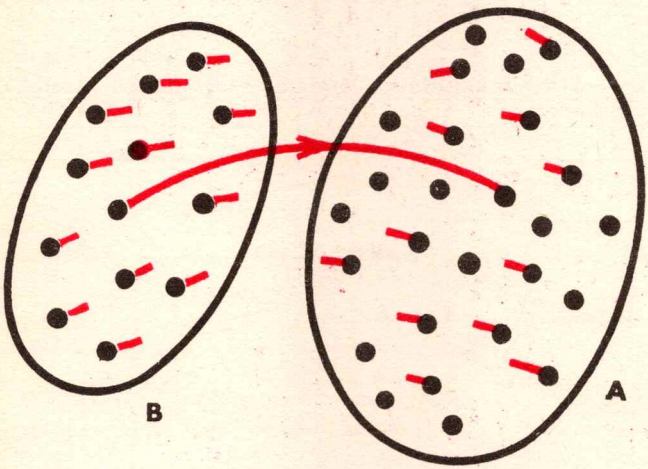


GRÁFICO 127

La relación f es una **inyección** $B \to A$.

(De todo punto de B parte una, y solo una, flecha: todo banco está ocupado por un alumno, y solo uno.

A todo punto de A llega a lo sumo una flecha: ningún alumno ocupa más de un banco.)

DEFINICIÓN 4 — *Sean A, B conjuntos.*

$$\#A \leqslant \#B \iff \text{existe una } \textbf{inyección}: A \to B.$$

El signo $\leqslant$ *se lee:* ***es menor o igual a,*** *o* ***es a lo sumo igual a.***
Si $a \leqslant b$ *y* $a \neq b$ *se escribe* $a < b$.

Los naturales han sido definidos anteriormente como los cardinales de los conjuntos

$$\phi \subset \{0\} \subset \{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\} \subset \ldots \subset \{0, 1, \ldots, n\} \subset \ldots \qquad (1)$$

Sean a y b naturales. Luego $a = \#A$ y $b = \#B$, igualdades en las que A y B son conjuntos que figuran en (1).

Por tanto,

$A \subset B$ (y entonces existe una inyección $A \to B$, por lo cual $a \leqslant b$)

o

$B \subset A$ (y entonces $b \leqslant a$).

PROPOSICIÓN 3 — Si cada una de las letras a, b designa un natural,

$$a \leqslant b \text{ o } b \leqslant a$$

EJERCICIO

Para todo natural n : $n < \delta$.

Vamos a probar que **la relación $\leqslant$ es un orden.**

PROPOSICIÓN 4 — *La relación $\leqslant$ es reflexiva.*

Para todo conjunto E : $\#E \leqslant \#E$.

En virtud de la definición de $\leqslant$ debemos probar la existencia de una inyección

$$E \to E.$$

La transformación idéntica en E es una inyección $E \to E$.

l. q. q. d.

PROPOSICIÓN 5 — *La relación $\leqslant$ es transitiva.*

Si cada una de las letras A, B, C designa un conjunto,

$$\#A \leqslant \#B \leqslant \#C \Rightarrow \#A \leqslant \#C$$

DEMOSTRACIÓN:

$$\#A \leqslant \#B \Rightarrow \text{existe una inyección } f : A \to B.$$
$$\#B \leqslant \#C \Rightarrow \text{existe una inyección } g : B \to C.$$

Como la compuesta de dos inyecciones es una inyección (cap. 12, teor. 4), $g \circ f$ es una inyección $A \to C$. Luego,

$$\#A \leqslant \#C.$$

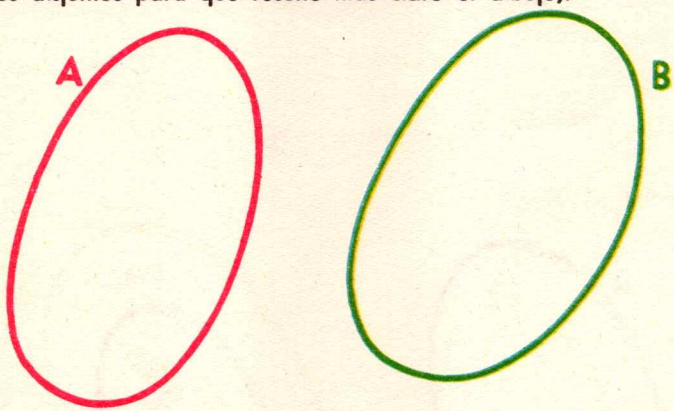
l. q. q. d.

PROPOSICIÓN 6 (Bernstein) — *La relación* $\leqslant$ *es antisimétrica.*

Si cada una de las letras A, B designa un conjunto,

$$\#A \quad B \text{ y } \#B \leqslant \#A \quad \Rightarrow \quad \#A = \#B$$

DEMOSTRACIÓN: Representemos los conjuntos A y B por diagramas (que dibujaremos disjuntos para que resulte más claro el dibujo).



Como $\#A \leqslant \#B$, existe una inyección $f : A \to B$ que es una **biyección**

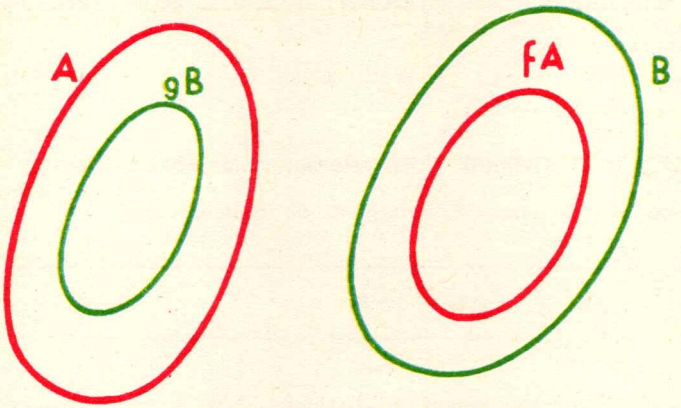
$$f : A \to fA \subset B$$

Así también $\#B \leqslant \#A$ implica la existencia de una biyección

$$g : B \to gB \subset A$$

Completemos nuestro diagrama llevando a él fA y gB y representando en el mismo color los conjuntos que tienen con seguridad el mismo cardinal.

$$\# A = \# fA$$
$$\# B = \# gB$$



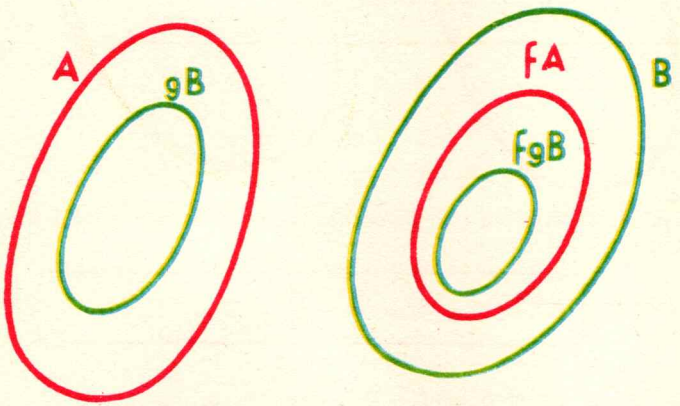
La biyección $A \to fA$ define a su vez una biyección

$$gB \to fgB \subset fA.$$

luego

$$\# B = \# gB = \# fgB.$$

Llevemos fgB al diagrama



Se tiene, pues, la situación

$$B \supset fA \supset fgB \quad \text{y} \quad \# B = \# fgB.$$

En virtud del teorema 4 (pág. 247), $\# fA = \# B$.

Como $\# fA = \# A$, se ha probado que $\# A = \# B$. l. q. q. d.

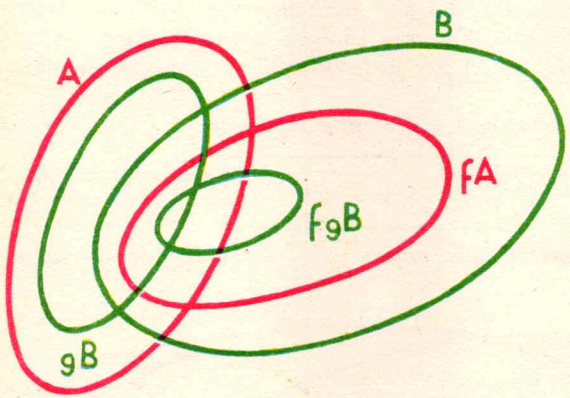
TEOREMA 5 — **La relación $\leqslant$ es un orden.**

Este teorema es una consecuencia inmediata de las tres proposiciones precedentes.

EJERCICIO

En la demostración de la proposición 6 (pág. 251) dibujamos los conjuntos A y B disjuntos.

Repite la demostración sirviéndote del diagrama general que ves aquí.



***DEDEKIND** Richard (1831-1916)*

Richard Dedekind, de nacionalidad alemana, es, sin duda, uno de los matemáticos que más ha contribuido a afirmar la matemática sobre bases sólidas en el marco de la teoría de los conjuntos.

17

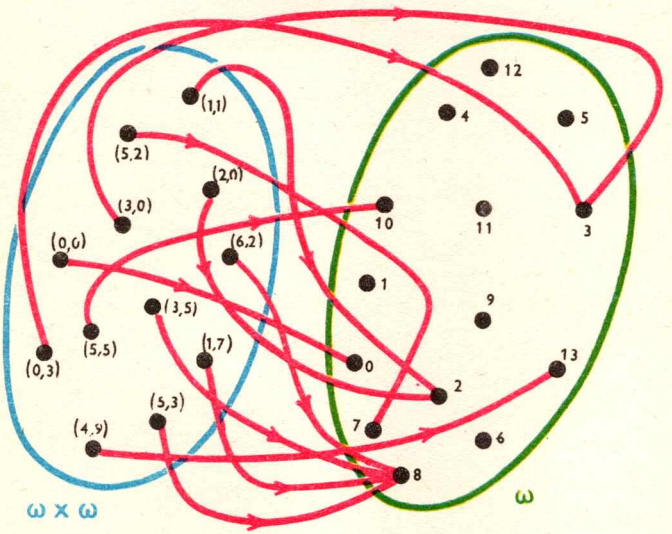
Adición

1 — DEFINICIÓN DE LA ADICIÓN

Tenemos dos bolsos.
El primero contiene 3 objetos; el segundo, 5.
Echa el contenido de los dos bolsos en esta caja vacía.
No sabemos nada de los objetos.
No sabemos si se parecen o son muy distintos.
Y, sin embargo, sabemos que la caja contiene ahora 8 objetos.
El número 8 está dado por el par ordenado (3, 5) y no por la naturaleza de los objetos.
Se dice que 8 es la suma de 3 y 5, y esto se escribe:

$$3 + 5 = 8$$

*La **adición** es la **función** que aplica todo par ordenado de números sobre su **suma**.*



LA ADICIÓN : $\omega \times \omega \rightarrow \omega : (x, y) \rightarrow x + y$

GRÁFICO 128

¡Como ves, la adición está ligada a la unión!

¿Cómo efectuar una adición partiendo de la unión?

— Piensa un número. Designémoslo a.

Yo pienso también un número. Llamémoslo b.

Nos proponemos calcular $a + b$.

¿Cómo hacer?

— ¡Vamos a fabricar cada uno un conjunto!

— ¿Qué conjunto construirás tú?

— Un conjunto de cardinal a, es decir un conjunto que esté formado por a objetos.

— ¿Tiene importancia que elijas tales o cuales objetos?

— No, la sola cosa que importa es que mi conjunto esté formado por a objetos.

— ¿Quieres dar un nombre a tu conjunto?

— Llamémoslo A.

— ¿Cómo indicaremos que A consta de a objetos?

— $$\#\,A = a$$

— Yo, por mi parte, ¿qué debo hacer?

— ¡Construir un conjunto B formado por b objetos!

— ¿Puedo elegir los objetos como me guste?

— Sí, la única cosa que importa es que el conjunto B conste de b objetos, y eso lo indicamos

$$\#\,B = b$$

— ¿Estás absolutamente seguro de que puedo tomar no importa qué objetos para construir el conjunto B?

— . . .

— ¿Puedo, por ejemplo, servirme de tu conjunto A y quitarte algunos objetos para fabricar B?

— ¡No, se sobreentiende que no! Los elementos de A y B deben ser diferentes.

— ¿Cómo podemos expresar mejor esto?

— $$A \cap B = \phi$$

— Resumamos nuestros preparativos.

Nos hemos dado dos números naturales $a, b \in \omega$.

Hemos construido dos conjuntos **A** *y* **B** *tales que*

$$a = \#\,A, \quad b = \#\,B, \quad A \cap B = \phi$$

— ¿Qué queda por hacer?
— Unir A y B y ver cuántos elementos tiene el conjunto $A \cup B$.
— ¿Cómo indicamos el número de elementos de $A \cup B$?
— Es el cardinal de $A \cup B$ que indicamos

$$\#(A \cup B)$$

— Luego,

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B$$
$$\text{pues} \quad A \cap B = \phi$$

Podemos, entonces, **definir.**

DEFINICION 1 —

Si $A \cap B = \phi$ ***entonces*** $\#A + \#B = \#(A \cup B)$

Si $a = \#A$, $b = \#B$ et $A \cap B = \phi$, ***entonces*** $a + b = \#(A \cup B)$

EJERCICIOS

1. $\#\{o\} + \#\{o\} \neq \#(\{o\} \cup \{o\})$

2. Te informan que $\#A = 17$, $\#B = 24$, $\#(A \cup B) = 35$
Calcula $\#(A \cap B)$, $\#(A \setminus B)$, $\#(B \setminus A)$.
(Ayúdate con un diagrama.)

3. Te informan que $\#A = 19$, $\#B = 7$, $\#(A \cup B) = 19$.
¿Qué deduces de esto respecto de A y B?
Calcula $\#(A \cap B)$, $\#(A \setminus B)$, $\#(B \setminus A)$

4. Te informan que $\#A = 27$, $\#B = 36$, $\#(A \cup B) = 63$.
¿Qué deduces respecto de A y B?
Calcula $\#(A \cap B)$, $\#(A \setminus B)$, $\#(B \setminus A)$

5. Esta clase tiene 24 alumnos.

Se pide a Silvia que escriba los nombres de 6 alumnos de esta clase en una hoja de papel; define así un conjunto S.

Mónica, a su vez, construye un conjunto M de 7 alumnos de esta clase. ¿Podemos decir con certeza cuál es el número de elementos de S $\cup$ M?

¿Qué puedes decir del número de elementos de S $\cup$ M?
(¡Ayúdate con un diagrama!)

6. En esta clase de 27 alumnos todos los alumnos están inscritos en uno, por lo menos, de los dos clubes siguientes: club de natación, "Cine-Club".

El número de los alumnos inscritos en los dos clubes es 7 y el "Cine-Club" tiene 18 miembros.

¿Cuántos miembros tiene el club de natación?

7. Esta escuela permite a sus 225 alumnos que se inscriban en un club de natación y en un club de teatro; 55 alumnos se han inscrito en el "Joven Teatro" y 117 en "Los Alegres Tritones". ¿Puedes dar el número de alumnos que no se han inscrito en ninguno de estos dos clubes? ¿Qué sabes de ese número?

Da también todas las informaciones que puedas sobre el número de alumnos que pertenecen a la vez a los dos clubes.

8. Ortópolis es una ciudad rectangular cuyas 12 avenidas rectilíneas están orientadas de Norte a Sur, y las 15 calles rectilíneas, orientadas de Este a Oeste.

La iluminación pública de Ortópolis está constituida exclusivamente por faroles de pie colocados cada 50 m en las avenidas y cada 60 m en las calles.

En cada intersección de una calle y una avenida hay un farol.

La distancia entre los 2 faroles extremos de cada calle es de 3.300 m. La distancia entre los 2 faroles extremos de cada avenida es de 2.800 m.

¿De cuántos faroles se compone la iluminación pública de Ortópolis?

9. Esta escuela, de 315 alumnos, ha organizado para su alumnado 3 clubes: el "Cine-Club", "Los Alegres Tritones" y el "Joven Teatro".

Cada alumno tiene que estar obligatoriamente inscrito en uno, por lo menos, de estos clubes.

153 alumnos están inscritos en un solo club: 75 de ellos en el "Joven Teatro" y 38 en el "Cine-Club".

25 alumnos están inscritos en los 3 clubes a la vez.

El "Cine-Club" tiene 130 socios de los cuales ninguno está inscrito en el "Joven Teatro" sin estar también inscrito en "Los Alegres Tritones".

¿Cuál es el número de socios del "Joven Teatro"?
¿Cuál es el número de socios del club "Los Alegres Tritones"?

10.

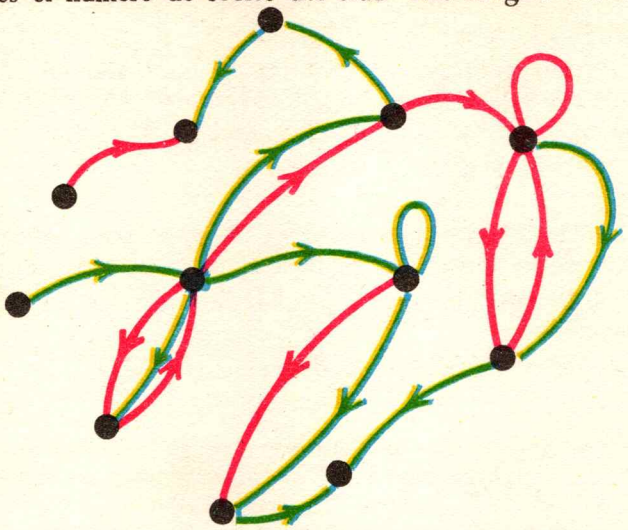


GRÁFICO 129

¿De cuántos pares ordenados consta la relación $A \cap B$?

11. En este conjunto de jóvenes la relación *...tiene por hermano a...* consta de 7 pares ordenados y la relación *...tiene por hermana a...* consta de 9 pares ordenados.
¿Cuántos son los pares ordenados de la relación *...tiene por hermano o hermana a...*?

12. Pienso un conjunto de 18 números naturales diferentes.
No te digo nada más respecto de ellos. Sin embargo, puedes calcular el número de pares ordenados de la relación $\leqslant$ definida en este conjunto de números.

13. Designemos por P el conjunto de los naturales pares y por I el conjunto de los naturales impares.
Luego,

$$\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$$
$$P = \{0, 2, 4, \dots\}$$
$$I = \{1, 3, 5, \dots\}$$

Sabes que $\# \omega = \delta$, $\# P = \# 2\omega = \delta$.
La aplicación $P \to I : x \to x + 1$ es una biyección.
¿Qué valor tiene, entonces, $\# I$?
Se tiene

$$\omega = P \cup I \quad y \quad P \cap I = \phi$$

Luego,

$$\delta + \delta = \delta$$

¡Si mi fortuna constara de tantos pesos como números hay en ω y te diera la mitad, continuaría siendo tan rico como antes!

14. Para efectuar $a + b$ hemos construido conjuntos disjuntos A, B tales que $a = \#\,A$, $b = \#\,B$. En seguida hemos mirado $A \cup B$.

Otra persona construye A', B' disjuntos, tales que $a = \#\,A'$ y $b = \#\,B'$ y llega a la nueva unión $A' \cup B'$.

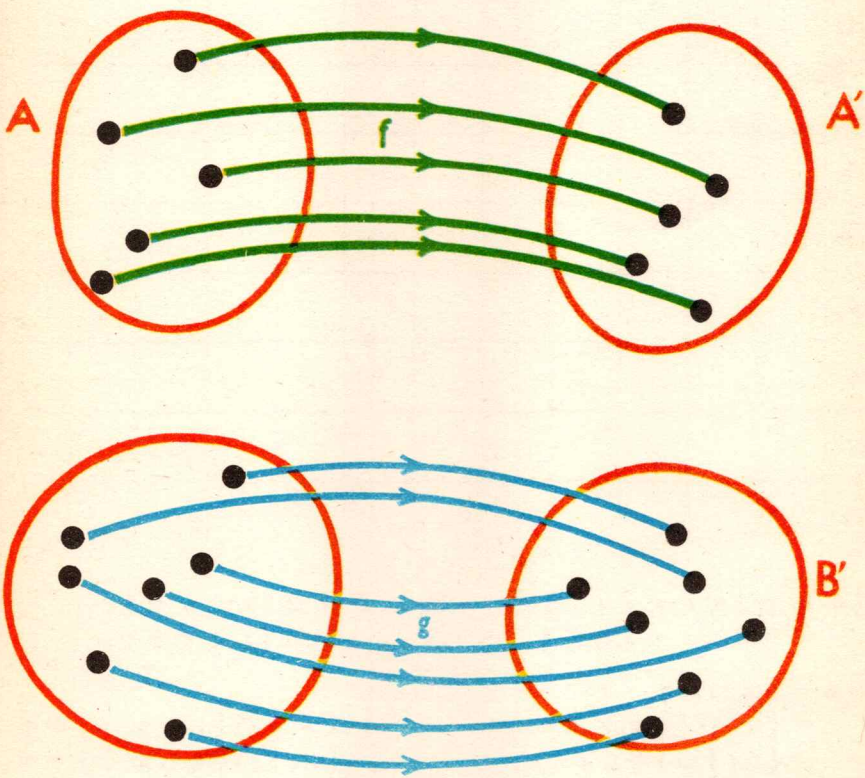
¿Estamos seguros de que $A \cup B \;\#\; A' \cup B'$

Como $a = \#\,A = \#\,A'$, existe una biyección $f : A \to A'$.

$b = \#\,B = \#\,B'$, existe una biyección $g : B \to B'$.

Como $A \cap B = \phi = A' \cap B'$, la unión $f \cup g$ es una biyección $A \cup B \to A' \cup B'$.

Luego, $\#\,(A \cup B) = \#\,(A' \cup B')$ l. q. q. d.



BIYECCIONES : $f : A \to A'$, $g : B \to B'$, $f \cup g : A \cup B \to A' \cup B'$

GRÁFICO 130

15. **Tabla de adición.** Completa la tabla de adición que ves aquí:

+	0	1	2	7	13	1962	4	875	9999	10	15	27	100
0													
1													
2													
7							11						
13													
1962													
4				11									
875													
9999													
10													
15													
27													
100													

16. $\delta = \#\{0, 1, 2, 3, 4 \dots\}$
$= \#\{1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$

$\delta = \#\{2, 3, 4, 5, 6 \dots\}$
$= \#\{3, 4, 5, 6, 7 \dots\}$

$\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
$= \{0\} \cup \{1, 2, 3 \dots\}$
$= \{0,1\} \cup \{2, 3, 4 \dots\}$
$= \dots$

$\{0\} \cap \{1, 2, 3, \dots\} = \phi$
$\{0,1\} \cap \{2, 3, 4, \dots\} = \phi$
$\dots$

¿Quieres deducir de las fórmulas anteriores

$$\delta = 1 + \delta = 2 + \delta = 3 + \delta \dots ?$$

17. Advierte especialmente que

$$2 + \delta = 3 + \delta$$

y que

$$2 \neq 3$$

Si a, b, c designan *cardinales*, la fórmula

$$a + c = b + c$$

no implica siempre

$$a = b.$$

Se dice que la adición de los cardinales no es **simplificable.**

2 — CONMUTATIVIDAD DE LA ADICIÓN

Mostremos que las propiedades de la adición resultan de las propiedades conocidas de la unión.

Comencemos por la conmutatividad.

PROPOSICIÓN 1 — *La adición es* ***conmutativa****: si cada una de las letras* a, b *designa un cardinal,* $a + b = b + a$.

¿Cómo hemos definido $a + b$?

—

Nos hemos dado $a, b \in \omega$.

Hemos construido A y B tales que

$$a = \#A, \quad b = \#B, \quad A \cap B = \phi$$

Se tiene, entonces, $a + b = \#(A \cup B)$

— Como consecuencia de la conmutatividad de $\cup$, podemos, además, escribir

$$a + b = \#(A \cup B) = \#(B \cup A) = b + a$$

Se ha podido poner el tercer signo $=$ porque $B \cap A = \phi$.

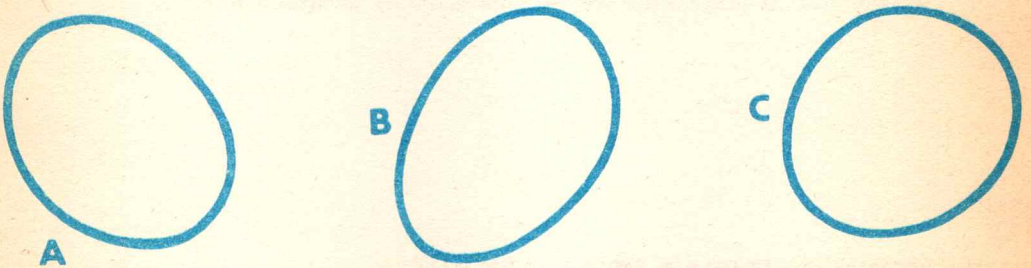
I. q. q. d.

3 — ASOCIATIVIDAD DE LA ADICIÓN

PROPOSICIÓN 2 — *La adición es* ***asociativa****: si cada una de las letras* ***a, b, c*** *designa un cardinal,* $(a + b) + c = a + (b + c)$.

DEMOSTRACIÓN: Construyamos conjuntos A, B, C *disjuntos dos a dos* tales que

$$a = \sharp\, A, \quad b = \sharp\, B, \quad c = \sharp\, C$$
$$A \cap B = B \cap C = C \cap A = \phi$$



Luego,

$$(A \cup B) \cap C = \phi \quad ; \quad A \cap (B \cup C) = \phi$$

En consecuencia,

$$a + b = \sharp\,(A \cup B) \quad ; \quad \sharp\,(B \cup C) = b + c$$
$$(a + b) + c = \sharp\,((A \cup B) \cup C) = \sharp\,(A \cup (B \cup C)) = a + (b + c)$$

l. q. q. d.

4 — ELEMENTO NEUTRO

— ¿Qué papel juega ϕ en la unión?
— El conjunto vacío es **neutro** para la unión.

Para todo conjunto E:	$E \cup \phi = E$

— ¿Cuál es el cardinal del conjunto vacío?
— Cero.
— ¿Qué propiedad tendrá la adición por ser ϕ neutro para $\cup$?
— *Cero es neutro para la adición.*

Para todo cardinal a: $a + 0 = a$.

— Demuestra esta fórmula.

— Sea un conjunto A tal que $a = \#A$.

$$a + 0 = \#(A \cup \phi), \quad \text{pues} \quad A \cap \phi = \phi$$
$$= \#A$$
$$= a$$

l. q. q. d.

PROPOSICIÓN 3 — *El número cero es* ***neutro para la adición:***
Para todo cardinal ***a:*** $a + 0 = 0 + a = a$.

Juntemos los resultados enunciados en las 3 proposiciones anteriores en el

TEOREMA 1 — **La adición de cardinales es conmutativa y asociativa. El número cero es neutro para la adición:**

Para todo cardinal a: $a + 0 = a$.

EJERCICIOS

1. Para todo objeto a existe una biyección

$$\{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4)\} \to \{1, 2. 3, 4\}$$

2. $$5 + 7 = \#(\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\} \cup \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7)\})$$
$$= \#(\{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\} \cup \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7)\})$$

3. Justifica la fórmula $0 + a = a$.

4. Demuestra que si cada una de las letras a, b, c, d designa un cardinal
$$(a + b) + (c + d) = (b + c) + (a + d).$$

5. Para todo conjunto A y todo conjunto B se tiene

$$\# (A \cup B) \leqslant \# A + \# B.$$

En efecto, sean los conjuntos A', B' tales que

$$\# A = \# A', \quad \# B = \# B', \quad A' \cap B' = \phi \text{ (gráfico 131)}.$$

Sean las biyecciones

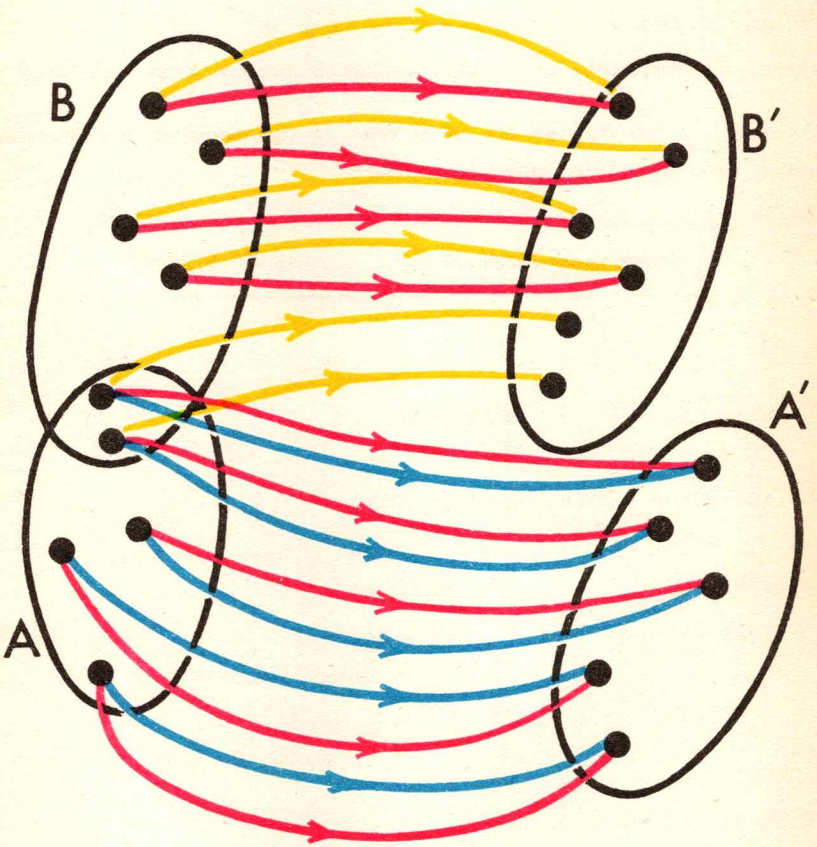
$$f : A \to A', \qquad g : B \to B'.$$

Designemos por h la función $A \cup B \to A' \cup B'$ definida como sigue:

para todo $a \in A$: $\quad h(a) = f(a)$

para todo $b \in B \setminus A$: $h(b) = g(b)$.

Está claro que h es una inyección $A \cup B \to A' \cup B'$ l. q. q. d.



f ES UNA BIYECCIÓN A → A'
g ES UNA BIYECCIÓN B → B'
h ES UNA BIYECCIÓN A ∪ B → A' ∪ B'

GRÁFICO 131

6. Si cada una de las letras $a, b, c, d, x, y, z, t, u, v, w$ designa un cardinal, la **conmutatividad** y la **asociatividad** de la adición nos permiten escribir

$$\begin{aligned} & a + b + c + d + x + y + z + t + u + v + w \\ = {} & a + x + u + b + y + v + c + z + w + d + t \\ = {} & a + b + c + d + t + u + v + w + x + y + z \\ = {} & z + a + y + b + x + c + w + d + v + t + u. \end{aligned}$$

7. Como consecuencia de la asociatividad y conmutatividad de la adición

$$\begin{aligned} & 627 + 1.352 \\ = {} & (600 + 20 + 7) + (1.000 + 300 + 50 + 2) \\ = {} & 1.000 + (600 + 300) + (20 + 50) + (7 + 2) \\ = {} & 1.000 + 900 + 70 + 9 \\ = {} & 1.979 \end{aligned}$$

8. Si $\{ A, B, C, D, F, G, H, K \}$ es una partición de E,

$$\#E = \#A + \#B + \#C + \#D + \#F + \#G + \#H + \#K$$

9. A cada letra le atribuimos como valor el número que indica su lugar en nuestro alfabeto.

Luego $a = 1,\ b = 2,\ c = 3,\ \ldots,\ x = 24,\ y = 25,\ z = 26.$

A toda palabra le asignamos un número de este modo:

$$f(\text{llevar}) = b + e + a + u = 2 + 5 + 1 + 21 = 29$$

Se ha definido así una función f del conjunto de las palabras en ω_0.

¿Esta función es *inyectiva*? ¿*Suryectiva*?

¿Qué valor atribuye esta función a tu nombre? ¿A tu apellido?

Calcula $f(\text{Inés})$ y $f(\text{Mario})$.

¿Por qué se tiene

$$f(\text{cielo}) = f(\text{liceo}),$$
$$f(\text{rima}) = f(\text{mira})\ ?$$

5 — ADICIÓN Y ORDEN

— Piensa un número natural y llámalo a.
Yo pienso un número natural y lo llamo b.
¿Cuál de los tres números a, b, $a + b$, es mayor?
— $a + b$.
— Escribe las fórmulas que expresan que $a + b$ es mayor que a y que b.

$$a \leqslant a + b$$
$$b \leqslant a + b$$

— Se ha tenido que poner $\leqslant$ y no $<$ en la primera fórmula porque yo puedo haber pensado $b = 0$.
Se ha tenido que poner $\leqslant$ y no $<$ en la segunda fórmula porque tú puedes haber pensado $a = 0$.
Pero esto no justifica todavía enteramente las fórmulas $a \leqslant a + b$, $b \leqslant a + b$.
Vamos a mostrar que si cada una de las letras a, b designa una entero natural se tiene siempre $a \leqslant a + b$.
Con este fin consideremos los conjuntos A, B tales que

$$a = \#\,A \qquad b = \#\,B \qquad A \cap B = \phi$$

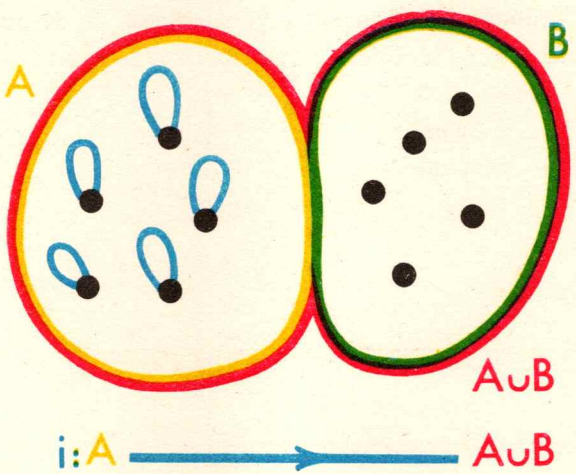
Sabemos cómo efectuar $a + b$.

$$a + b = \#\,(A \cup B)$$

— La fórmula que hay que probar $a \leqslant a + b$ puede escribirse también

$$\#\,A \leqslant \#\,(A \cup B)$$

¿Cuándo escribimos $\#\,E \leqslant \#\,F$?
— Cuando existe una inyección $E \to F$.
— Debemos, entonces, mostrar que existe una inyección $A \to A \cup B$ y esto es muy fácil.



INYECCIÓN
GRÁFICO 132

Enunciemos el resultado.

PROPOSICIÓN 4 — *Si cada una de las letras* a, b *designa un entero natural se tienen las fórmulas*

$$a \leqslant a + b$$
$$b \leqslant a + b$$

PROPOSICIÓN 5 — *Si* a, c *designan cardinales,*

$a \leqslant c \quad \Rightarrow \quad$ *existe un cardinal* b *tal que* $c = a + b$.

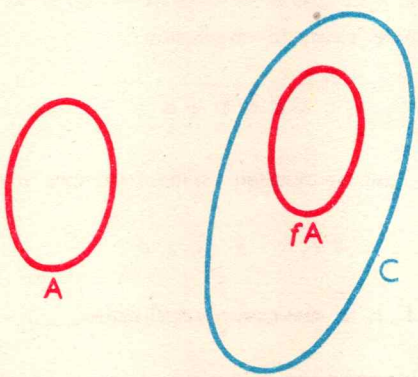
DEMOSTRACIÓN: Construyamos conjuntos A, C disjuntos, tales que

$$a = \# A \qquad y \qquad c = \# C.$$

Como $\# A \leqslant \# C$,

existe una inyección $f : A \to C$.

Esta inyección es también una biyección $f : A \to fA$.



Sea $B = C \setminus fA$

Se tiene $C = (fA) \cup B \quad y \quad (fA) \cap B = \phi.$

Por tanto,

$$c = \# C = \# fA + \# B$$
$$= \# A + \# B \qquad \text{puesto que } \# A = \# fA.$$
$$= a + \# B \qquad \text{puesto que } a = \# A.$$

Basta, entonces, tomar $b = \# B$ l. q. q. d.

— Reunamos las proposiciones 4 y 5 en un enunciado único.

— **TEOREMA 2** — **Si cada una de las letras** a, c **designa un cardinal,**

$a \leqslant c \iff$ **existe un cardinal** b **tal que** $c = a + b$.

Ahora es fácil demostrar la importante

PROPOSICIÓN 6 — *Si* a, b, c *designan cardinales,*

$$a \leqslant b \quad \Rightarrow \quad a + c \leqslant b + c$$

DEMOSTRACIÓN: En virtud del teorema 2,

$a \leqslant b \quad \Rightarrow$ existe un cardinal x tal que $b = a + x$.

Por consiguiente,

$$b + c = a + x + c$$
$$= (a + c) + x$$

Existe, pues, un cardinal x tal que $b + c = (a + c) + x$.
El teorema 2 nos permite sacar la conclusión

$$a + c \leqslant b + c$$

l.q.q.d.

— Mostremos, por último, que se pueden *"sumar miembro a miembro las fórmulas"*

$$a \leqslant b \quad \text{y} \quad c \leqslant d$$

TEOREMA 3 — **Si** a, b, c, d **designan cardinales,**

$$a \leqslant b \text{ y } c \leqslant d \quad \Rightarrow \quad a + c \leqslant b + d$$

En virtud de la proposición 6,

$$a \leqslant b \quad \Rightarrow \quad a + c \leqslant b + c \qquad (1)$$

En virtud de la proposición 6,

$$c \leqslant d \quad \Rightarrow \quad c + b \leqslant d + b$$

y teniendo en cuenta la conmutatividad de $+$,

$$c \leqslant d \quad \Rightarrow \quad b + c \leqslant b + d \qquad (2)$$

En virtud de la transitividad de $\leqslant$ se deduce de las fórmulas (1) y (2)

$$a + c \leqslant b + d$$

l.q.q.d.

6 — SIMPLIFICABILIDAD DE LA ADICIÓN DE NATURALES

Sin duda admitirán sin reparos que si cada una de las letras a, b, c designa un natural,

$$a + b = a + c \Rightarrow b = c$$

Por si tienes interés vamos a dar la demostración, bastante difícil, de esta proposición.

TEOREMA 4 — **Si cada una de las letras a, b, c designa un natural,**

$$a + b = a + c \Rightarrow b = c$$

DEMOSTRACIÓN: Sean a, b, c naturales tales que

$$a + b = a + c \tag{1}$$

Vamos a probar que $b = c$.

Sean A, B, C conjuntos **disjuntos dos a dos** y tales que

$$a = \#A, \quad b = \#B, \quad c = \#C$$

La fórmula (1) implica que

$$A \cup B \# A \cup C \tag{2}$$

Se dará una, y solo una, de las tres posibilidades:

1. $b < c$ 2. $b = c$ 3. $c < b$

Probemos, para empezar, que la posibilidad 1 no puede darse.

Si $b < c$ existe una inyección

$$f : B \to C$$

y ésta debe ser tal que

$$fB \neq C$$

(pues si no f sería una biyección $B \to C$ y se tendría $b = c$).

Como f es una biyección $f : B \to fB$, se tiene

$$A \cup B \# A \cup fB \tag{3}$$

Como $fB \subset C$, se tiene a $A \cup fB \subset A \cup C$ (4)

Pero sabemos que

$$A \cup C \# A \cup B \qquad (1)$$

Y teniendo en cuenta (1) y (3),

$$A \cup C \# A \cup B \# A \cup fB$$

Como $\#$ es transitiva,

$$A \cup C \# A \cup fB$$

y el conjunto **finito** $A \cup C$ sería equipotente con su *parte propia* $A \cup fB$, lo cual es imposible en virtud del teorema de Dedekind (teor. 2 del cap. 16).

Del mismo modo demostraríamos que la posibilidad 3 no se puede dar.

Luego, $b = c$.

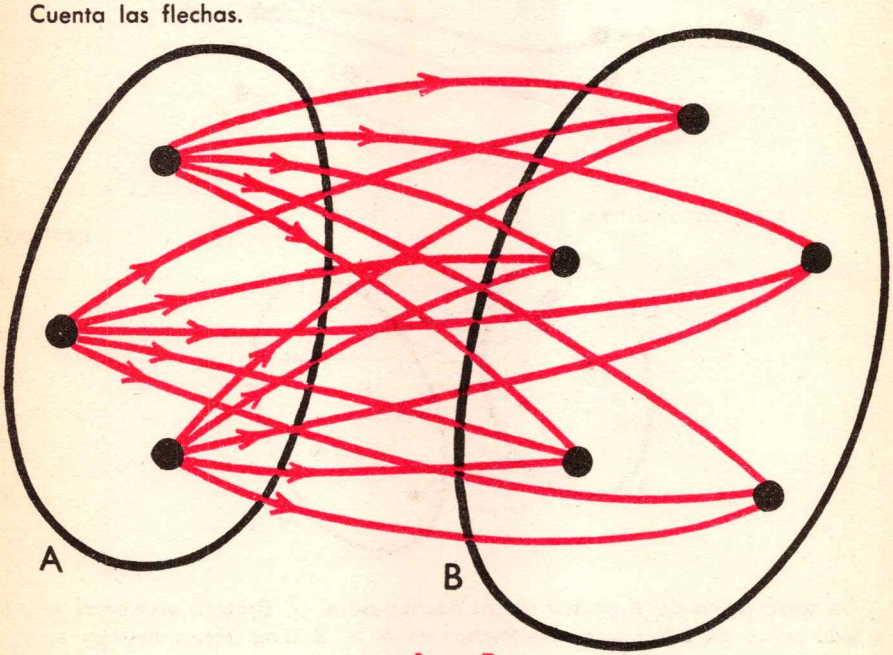
l.q.q.d.

18

La multiplicación

1 — DEFINICIÓN DE MULTIPLICACIÓN

— Dibuja un conjunto A de cardinal 3 y un conjunto B de cardinal 5.
Traza el gráfico de A × B.
Cuenta las flechas.



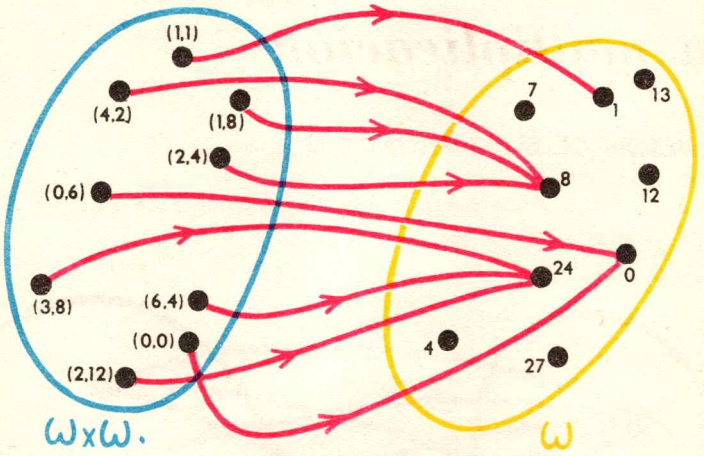
A × B
GRÁFICO 133

— Este gráfico tiene 15 = 3 • 5 flechas.
— Demos como definición

DEFINICIÓN 1 — *El* **producto** *de los cardinales de* **A** *y* **B** *es el cardinal de* **A × B.**

$$\#A \bullet \#B = \#(A \times B)$$

DEFINICIÓN 2 — *La multiplicación es la función que aplica todo par ordenado de naturales sobre su producto.*



LA MULTIPLICACIÓN : $\omega \times \omega$ ω : (x, y) $x \cdot y$

GRÁFICO 134

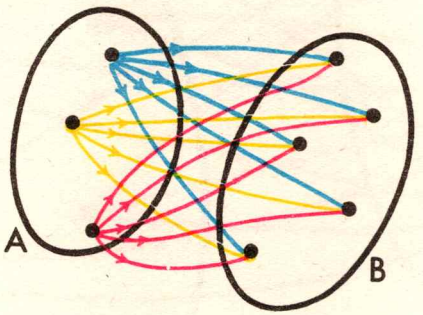


GRÁFICO 135

De cada punto de A parten tantas flechas de A × B como elementos hay en B, y a todo punto de B llegan tantas flechas de A × B como elementos hay en A.

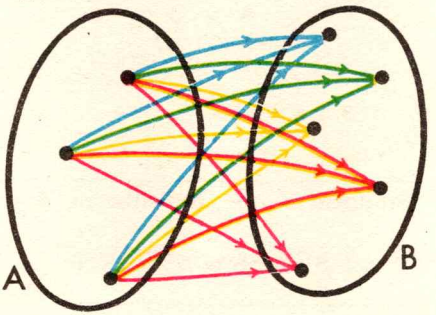


GRÁFICO 136

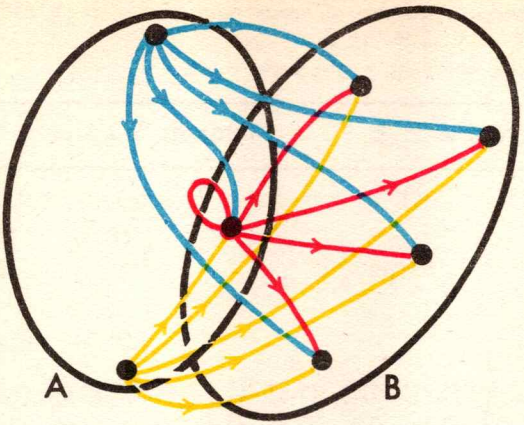


GRÁFICO 137

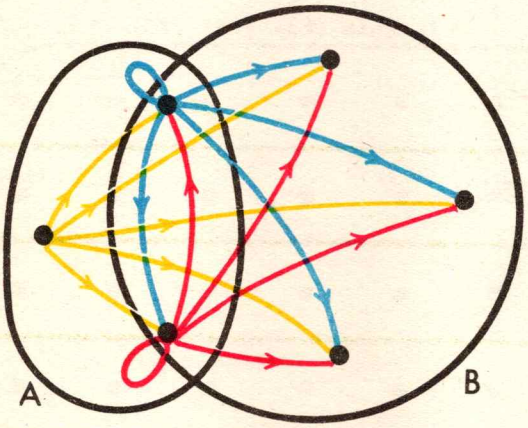


GRÁFICO 138

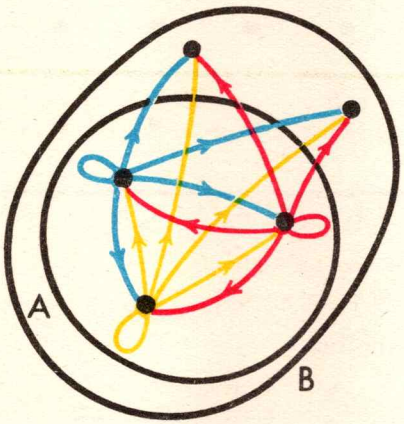


GRÁFICO 139

Para hallar el producto de dos números naturales a, b se construyen conjuntos A, B tales que $a = \#A$ y $b = \#B$;
el cardinal de $A \times B$ es, entonces, el producto $a \cdot b$.

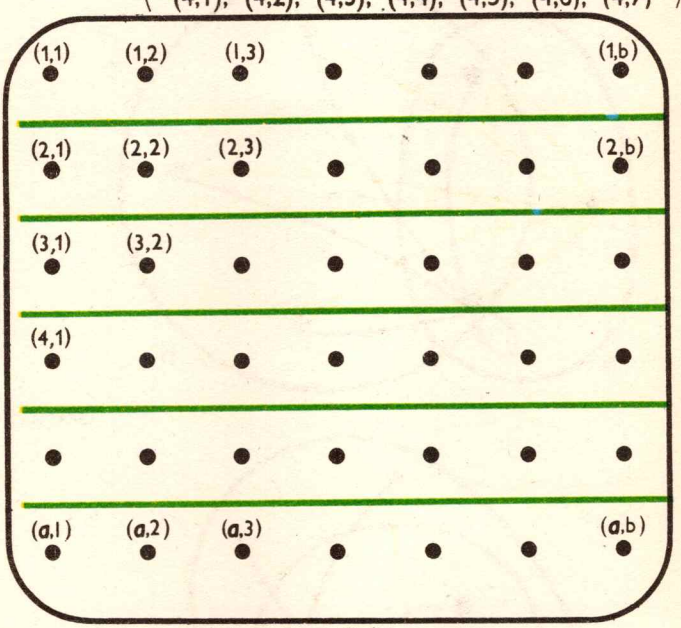
Si $a = \#A$ y $b = \#B$ **entonces,** $a \cdot b = \#(A \times B)$

Como $a = \#\{1, 2, \ldots a\}$ y $b = \#\{1, 2, \ldots b\}$

$$a \cdot b = \#(\{1, 2, \ldots a\} \times \{1, 2, \ldots b\}) = \#\left\{\begin{array}{l}(1, 1), \ldots, (1, b),\\ (2, 1), \ldots, (2, b),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ (a, 1), \ldots, (a, b)\end{array}\right\}$$

Por ejemplo:

$$4 \cdot 7 = \#\left\{\begin{array}{l}(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7),\\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (2,7),\\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7),\\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (4,7)\end{array}\right\}$$



$\{1, \ldots, a\} \times \{1, \ldots, b\}$

El dibujo anterior sugiere una partición de

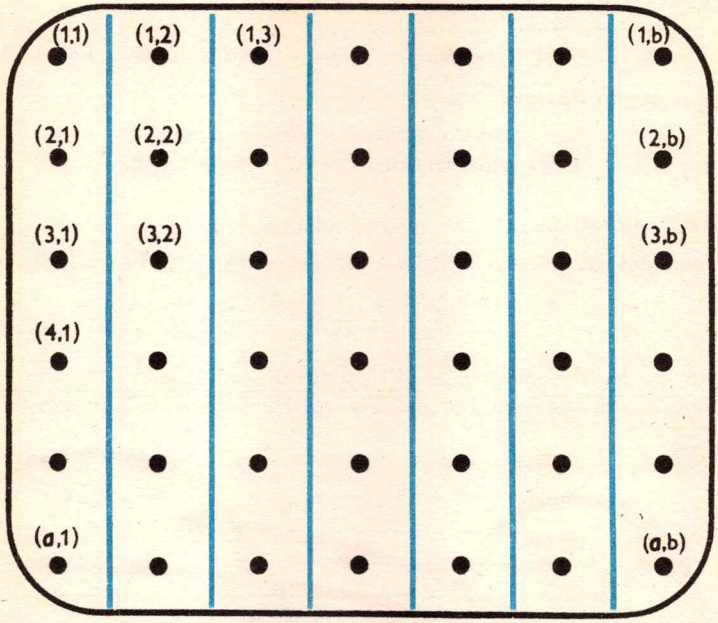
$$\{1, \ldots, a\} \times \{1, \ldots, b\}$$

en a partes, cada una de cardinal b.

Luego, $a \cdot b = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{a \text{ términos}}$

— ¿Podrías dar otra partición interesante de

$$\{1, \ldots, a\} \times \{1, \ldots, b\}\ ?$$



$$\{1, \ldots, a\} \times \{1, \ldots, b\}$$

— Este dibujo sugiere una partición de $\{1, \ldots, a\} \times \{1, \ldots, b\}$ en b partes de cardinal a.

Luego,

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{b \text{ términos}}$$

La multiplicación de los enteros naturales se reduce a una adición de términos iguales.

$$a \cdot b = \underbrace{b + \ldots + b}_{a \text{ términos}} = \underbrace{a + \ldots + a}_{b \text{ términos}}$$

2 — PAPEL DE 0 Y 1 EN LA MULTIPLICACIÓN

PROPOSICIÓN 1 — *Para todo número* a *natural,*

$$0 \cdot a = 0 = a \cdot 0 \qquad \text{y} \qquad 1 \cdot a = a = a \cdot 1$$

Esto se expresa diciendo que

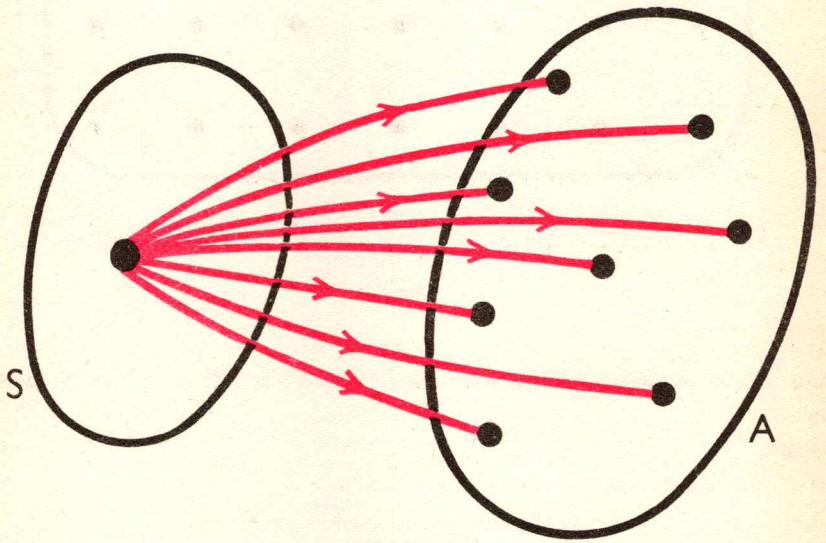
1 *es* **neutro** *para la multiplicación;*
0 *es* **absorbente** *para la multiplicación.*

DEMOSTRACIÓN: Sea A un conjunto tal que $a = \#\,A$.

Por consiguiente, $0 \cdot a = \#\,\phi \cdot \#\,A = \#\,(\phi \times A) = \#\,\phi = 0$

$$a \cdot 0 = \#\,A \cdot \#\,\phi = \#\,(A \times \phi) = \#\,\phi = 0$$

Por otra parte, el número 1 es el cardinal de todo conjunto unitario.
El producto del conjunto unitario S y del conjunto A es equipotente con A.



$$\#\,(S \times A) = \#\,A$$

GRÁFICO 140

Mostrarás del mismo modo que $\#\,(A \times S) = \#\,A$. (Basta dar vuelta las flechas del gráfico 140.)

En consecuencia, $1 \cdot a = \#\,S \cdot \#\,A = \#\,(S \times A) = \#\,A = a$

$$a \cdot 1 = \#\,A \cdot \#\,S = \#\,(A \times S) = \#\,A = a$$

l.q.q.d.

3 — CONMUTATIVIDAD DE LA MULTIPLICACIÓN

PROPOSICIÓN 2 — *Si cada una de las letras* a, b *designa un natural,*

$$a \cdot b = b \cdot a$$

En virtud de la proposición 1, la fórmula $a \cdot b = b \cdot a$ es verdadera si a o b son iguales a 0 o a 1. Podemos, pues, suponer en adelante

Vamos a dar dos demostraciones. La primera utiliza gráficos y la segunda se apoya sobre las fórmulas que reducen la multiplicación a una adición de términos iguales.

PRIMERA DEMOSTRACIÓN:

Para efectuar $a \cdot b$ construimos conjuntos A, B tales que $a = \#A$, $b = \#B$.

Se tiene, entonces,

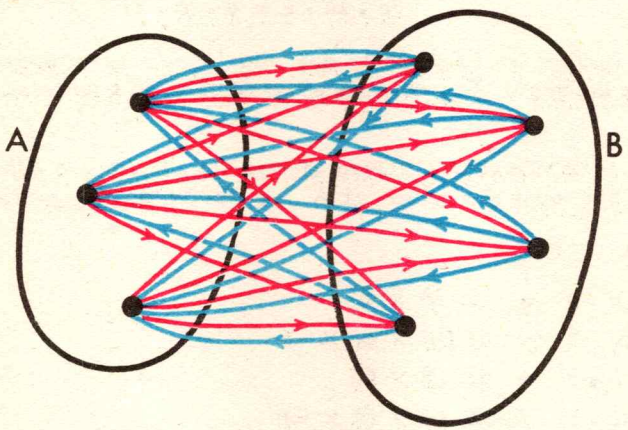
$$a \cdot b = \#(A \times B) \quad , \quad b \cdot a = \#(B \times A)$$

Si $A \neq B$ $\qquad A \times B \neq B \times A$.

Debemos mostrar que, no obstante, se tiene $\#(A \times B) = \#(B \times A)$.

— ¿Cómo pasar de $A \times B$ a $B \times A$?

— Dando vuelta las flechas.



$A \times B \qquad \neq \qquad B \times A$

BIYECCIÓN : $A \times B \to B \times A : (x, y) \to (y, x)$

GRÁFICO 141

Luego, $a \cdot b = \#(A \times B) = \#(B \times A) = b \cdot a$

l.q.q.d.

SEGUNDA DEMOSTRACIÓN: Hemos visto que si cada una de las letras a, b designa un natural,

$$a \cdot b = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{a \text{ términos}} = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{b \text{ términos}}$$

Escribe las fórmulas análogas para el producto $b \cdot a$.

$$b \cdot a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{b \text{ términos}} = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{a \text{ términos}}$$

Luego, $a \cdot b = b \cdot a$ l.q.q.d.

4 — ASOCIATIVIDAD DE LA MULTIPLICACIÓN

PROPOSICIÓN 3 — *Si cada una de las letras a, b, c designa un natural,*

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Puedes verificar inmediatamente que esta fórmula es verdadera si una de las letras a, b, c designa 0. Supondremos en adelante a, b, c no nulos.

PRIMERA DEMOSTRACIÓN: Para efectuar $(a \cdot b) \cdot c$ y $a \cdot (b \cdot c)$, construimos conjuntos A, B, C tales que $a = \#A$, $b = \#B$, $c = \#C$.

Se tiene

$$\begin{aligned} a \cdot b &= \#(A \times B) \\ (a \cdot b) \cdot c &= \#((A \times B) \times C) \\ b \cdot c &= \#(B \times C) \\ a \cdot (b \cdot c) &= \#(A \times (B \times C)) \end{aligned}$$

Debemos probar que $\#((A \times B) \times C) = \#(A \times (B \times C))$, o sea mostrar una biyección $(A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$.

He aquí una biyección tal:

$$(A \times B) \times C \to A \times (B \times C) : ((a, b), c) \to (a, (b, c))$$

l.q.q.d.

SEGUNDA DEMOSTRACIÓN: **Sabemos que si cada una de las letras x, y designa un natural no nulo,**

$$x \cdot y = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{y \text{ términos}} = \underbrace{y + y + \ldots + y}_{x \text{ términos}}$$

Luego,

$$(a \cdot b) \cdot c = \underbrace{(a \cdot b) + (a \cdot b) + \ldots + (a \cdot b)}_{c \text{ términos}}$$

Cada uno de los productos $a \cdot b$ es la suma de a términos iguales a b; por lo cual,

$$(a \cdot b) \cdot c = \underbrace{\overbrace{(b + \ldots + b)}^{a \text{ términos}} + \overbrace{(b + \ldots + b)}^{a \text{ términos}} + \ldots + \overbrace{(b + \ldots + b)}^{a \text{ términos}}}_{c \text{ paréntesis}}$$

$$= \underbrace{b + b + \ldots\ldots\ldots + b}_{a \cdot c \text{ términos}}$$

Del mismo modo,

$$a \cdot (b \cdot c) = \underbrace{(b \cdot c) + \ldots\ldots\ldots + (b \cdot c)}_{a \text{ términos}}$$

$$= \underbrace{\overbrace{(b + \ldots + b)}^{c \text{ términos}} + \overbrace{(b + \ldots + b)}^{c \text{ términos}} + \ldots + \overbrace{(b + \ldots + b)}^{c \text{ términos}}}_{a \text{ paréntesis}}$$

$$= \underbrace{b + \ldots\ldots\ldots\ldots + b}_{a \cdot c \text{ términos}}$$

Luego, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

l.q.q.d.

5 — LA MULTIPLICACIÓN DISTRIBUYE LA ADICIÓN

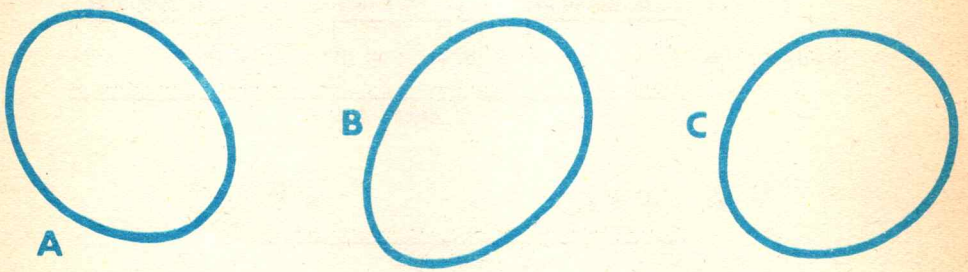
PROPOSICIÓN 4 — *La multiplicación es distributiva con respecto a la adición.*

Dicho de otro modo:

Si cada una de las letras **a**, **b**, **c** *designa un natural,*

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

PRIMERA DEMOSTRACIÓN: Sean a, b, c cardinales y A, B, C conjuntos *disjuntos dos a dos* tales que $a = \#\,A$, $b = \#\,B$, $c = \#\,C$.



Luego,

$$\begin{aligned} b + c &= \#\,(B \cup C) && (\ldots \text{pues } B \cap C = \phi) \\ a \cdot (b + c) &= \#\,(A \times (B \cup C)) \\ a \cdot b &= \#\,(A \times B) \\ a \cdot c &= \#\,(A \times C) \end{aligned}$$

Como $B \cap C = \phi$, se tiene también $(A \times B) \cap (A \times C) = \phi$.

Luego,

$$(a \cdot b) + (a \cdot c) = \#\,((A \times B) \cup (A \times C))$$

Pero sabemos que el producto conjustista $\times$ es distributivo con respecto a $\cup$. (cap. 7, § 11, pág. 111).

Luego,

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

y

$$a \cdot (b + c) = \#\,(A \times (B \cup C)) = \#\,((A \times B) \cup (A \times C)) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

l.q.q.d.

SEGUNDA DEMOSTRACIÓN: Sean a, b, c *naturales.*

Sabemos que

$$a \bullet (b + c) = \underbrace{(b + c) + (b + c) \ldots\ldots + (b + c)}_{a \text{ términos}}$$

En virtud de las propiedades de *asociatividad* y de *conmutatividad* de la adición

$$a \bullet (b + c) = \underbrace{(b + c) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (b + c)}_{a \text{ términos}}$$

$$= \underbrace{(b + b + \ldots + b)}_{a \text{ términos}} + \underbrace{(c + c + \ldots + c)}_{a \text{ términos}}$$

$$= \quad (a \bullet b) \quad + \quad (a \bullet c)$$

l.q.q.d.

6 — LA MULTIPLICACIÓN Y EL ORDEN

PROPOSICIÓN 5 — Si a, b, c *designan naturales,*

$$a \leqslant b \quad \Rightarrow \quad a \bullet c \leqslant b \bullet c .$$

PRIMERA DEMOSTRACIÓN: Sean A, B, C conjuntos tales que $a = \#\,A$, $b = \#\,B$, $c = \#\,C$.

Luego, $a \bullet c = \#\,(A \times C)$, $\quad b \bullet c = \#\,(B \times C)$.

Como $a \leqslant b$, existe una inyección $f : A \to B$.

La aplicación

$$A \times C \to B \times C : \quad (a, c) \to (f(a), c)$$

es una inyección $A \times C \to B \times C$.

Luego, $a \bullet c \leqslant b \bullet c$.

l.q.q.d.

SEGUNDA DEMOSTRACIÓN: Como $a \leqslant b$, existe (cap. 17, teor. 2, pág. 267) un natural x tal que

$$b = a + x$$

Como la multiplicación es distributiva con respecto a la adición

$$\begin{aligned} b \cdot c &= (a + x) \cdot c \\ &= (a \cdot c) + (x \cdot c) \end{aligned}$$

Luego,

$$a \cdot c \leqslant b \cdot c$$

l.q.q.d.

TEOREMA 1 — La multiplicación de los enteros naturales es asociativa, conmutativa, distributiva con respecto a la adición.

Admite 1 como neutro y 0 como absorbente:

Para todo natural n: $1.n = n$ y $0.n = 0$.

El orden $\leqslant$ es compatible con la multiplicación:

$$a, b, c, d \in \omega,\ a \leqslant b,\ c \leqslant d \ \Rightarrow\ a \cdot c \leqslant b \cdot d$$

La primera parte de este teorema recapitula resultados ya obtenidos.

Queda solamente por demostrar que

$$a, b, c, d \in \omega,\ a \leqslant b,\ c \leqslant d \ \Rightarrow\ a \cdot c \leqslant b \cdot d$$

DEMOSTRACIÓN: En virtud de la proposición 5,

$$a \leqslant b \ \Rightarrow\ a \cdot c \leqslant b \cdot c \qquad (1)$$

También (¡la multiplicación es conmutativa!)

$$c \leqslant d \ \Rightarrow\ b \cdot c \leqslant b \cdot d \qquad (2)$$

Debido a la transitividad de $\leqslant$, las fórmulas (1) y (2) implican

$$a \cdot c \leqslant b \cdot c \leqslant b \cdot d \ \Rightarrow\ a \cdot c \leqslant b \cdot d$$

l.q.q.d.

7 — DIVISIBILIDAD

Sean a, b enteros naturales. (Luego, $a, b \in \omega$).
Si existe un natural x tal que $b = a \cdot x$, se dice que **a divide a b** *y se escribe* $a \mid b$.

PROPOSICIÓN 6 — *Para todo entero natural n:*

$$1 \mid n \mid n \mid 0.$$

La fórmula $n = 1 \cdot n$ muestra que $1 \mid n$ y que $n \mid n$,
lo cual se escribe brevemente $1 \mid n \mid n$.
La fórmula $0 = n \cdot 0$ muestra que $n \mid 0$.
Repitamos la proposición precedente en otros términos.

> PROPOSICIÓN 6 — *El número* **uno** *divide a todos los naturales.*
> **Todo natural divide a cero.**

PROPOSICIÓN 7 — $(a \in \omega \text{ y } 0 \mid a \Rightarrow a = 0)$.
Dicho de otro modo: *cero es el único número divisible por cero.*

DEMOSTRACIÓN: Si $0 \mid a$, existe $x \in \omega$ tal que

$$a = x \cdot 0 \quad \text{y, por tanto,} \quad a = 0 .$$

l.q.q.d.

PROPOSICIÓN 8 — *La relación $\mid$ es reflexiva.*
¿Cuál es la proposición en la que esta afirmación ya ha sido probada?

PROPOSICIÓN 9 — *La relación $\mid$ es transitiva.*
Dicho de otro modo:

$$(a, b, c \in \omega \text{ y } a \mid b \mid c) \Rightarrow a \mid c$$

DEMOSTRACIÓN: Como $a \mid b$, existe $x \in \omega$ tal que $b = a \cdot x$.
Como $b \mid c$, existe $y \in \omega$ tal que $c = b \cdot y$.
Luego,

$$c = b \cdot y = (a \cdot x) \cdot y = a \cdot (x \cdot y)$$

y esto muestra que $a \mid c$.

l.q.q.d.

PROPOSICIÓN 10 — *La relación* | *definida en* $\omega_0 = \{1, 2, 3...\}$ *está incluida en la relación* $\leqslant$.

Dicho de otro modo:

$$a, b \in \omega_0 \text{ y } a \mid b \quad \Rightarrow \quad a \leqslant b$$

DEMOSTRACIÓN: Si a | b, existe $x \in \omega_0$, tal que

$$b = x \cdot a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{x \text{ términos}}$$

Luego, $a \leqslant b$.

l.q.q.d.

PROPOSICIÓN 11 — *La relación* | *definida en* ω_0 *es antisimétrica.*

De otro modo:

$$a, b \in \omega_0 \ , \ a \mid b \mid a \quad \Rightarrow \quad a = b$$

DEMOSTRACIÓN: En virtud de la proposición 10,

$$a \mid b \mid a \quad \Rightarrow \quad a \leqslant b \leqslant a$$

Debido a la antisimetría de $\leqslant$ tiene que ser $a = b$.

l.q.q.d.

PROPOSICIÓN 12 — *La relación* | *definida en* ω *es antisimétrica.*

Imagina el gráfico de la relación | en ω_0.

— ¿Qué hacer para obtener el gráfico de la relación | en ω?

— Agregar el punto cero, dibujar una flecha de todo punto de ω hacia cero. (Luego, en cero habrá que dibujar un lazo.)

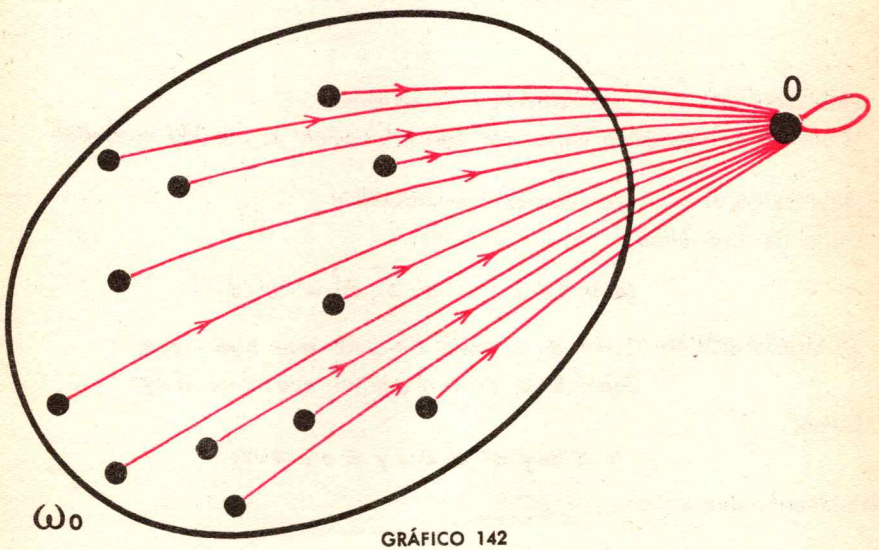


GRÁFICO 142

ALGUNAS DE LAS NUEVAS FLECHAS DEL GRÁFICO DE LA RELACIÓN |

Todas las nuevas flechas llegan, pues, a cero, y como no hemos creado ninguna ida y vuelta entre puntos distintos, la relación $|$ en ω resulta ser, sin duda, antisimétrica.

TEOREMA 2 — **La relación $|$ definida en ω es un orden no total.**

Las proposiciones 8, 9, 12 permiten afirmar que $|$ es un orden en ω.
Este orden es *no total*, puesto que 2 no divide a 3 y 3 no divide a 2.

TEOREMA 3 — **El orden $|$ es compatible con la multiplicación.**
Dicho de otro modo:

$$(a, b, c, d \in \omega \ , \ a \mid b, \ c \mid d) \Rightarrow a \cdot c \mid b \cdot d \, .$$

DEMOSTRACIÓN: Como $a|b$, existe $x \in \omega$ tal que $b = a \cdot x$
Como $c|d$, existe $y \in \omega$ tal que $d = c \cdot y$

Luego, $b \cdot d = (a \cdot c) \cdot (x \cdot y)$
lo cual muestra que $(a \cdot c) \mid (b \cdot d)$

l.q.q.d.

TEOREMA 4 — **Si un natural divide a dos naturales divide a su suma.**
De otro modo:

$$(a, b, c \in \omega, \ a \mid b, \ a \mid c) \Rightarrow a \mid (b + c)$$

DEMOSTRACIÓN: Como $a|b$, existe $x \in \omega$ tal que $b = a \cdot x$
Como $a|c$, existe $y \in \omega$ tal que $c = a \cdot y$
Luego, $b + c = a \cdot x + a \cdot y$
$= a \cdot (x + y)$
lo cual muestra que $a \mid (b + c)$.

l.q.q.d.

EJERCICIOS

1. Vamos a entretenernos en escribir todas las "palabras" de 2 letras, tengan o no sentido:

   aa, ab, ac, ... ba, bb, bc, ... zz.

   ¿Cuántas "palabras" de 2 letras podemos formar?

2. ¿Cuántas "palabras" de 4 letras podemos formar que comiencen y terminen en vocal y cuyas 2 letras centrales sean consonantes?

3. ¿Cuántas de 3 letras que comiencen en vocal y terminen en consonante?

4. ¿Cuántos números de 2 cifras existen en el sistema decimal?
(Recordemos que un número de 2 cifras *no* empieza por 0.)
¿Cuántos existen de 1 cifra?
¿Cuántos de 3 cifras?
¿Cuántos tienen 3 cifras a lo sumo (es decir, 3 cifras *o menos* de 3 cifras)?

En los ejercicios 5 *a* 31 *cada una de las letras designa un natural.*

5. $$\begin{aligned}(a+b)\cdot(c+d) &= ((a+b)\cdot c)+((a+b)\cdot d)\\ &= (a\cdot c)+(b\cdot c)+(a\cdot d)+(b\cdot d)\end{aligned}$$

Justifica cada una de estas igualdades.

CONVENCIÓN PARA LA ESCRITURA

Es costumbre escribir

$ac + bc + ad + bd$ en vez de $(a\cdot c) + (b\cdot c) + (a\cdot d) + (b\cdot d)$
$(a + b)(c + d)$ en vez de $(a + b)\cdot(c + d)$

Así, la fórmula precedente se escribirá

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$$

Nosotros, sin mención expresa, seguiremos esta convención casi siempre.

6. $(1 + x)(1 + y) = 1 + x + y + xy$.

7. $(a + b + c)(x + y) =$

8. $(u + v + w)(x + y + z) =$

9. $(1 + x + y)(1 + u + v) =$

10. $a \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b$
$= a^2 + ab.$

Justifica la primera línea.

En la segunda línea hemos introducido la importante *convención de escritura*

$$a^2 = a \cdot a$$

Se dice que a^2 es el **cuadrado** de a.

11. $(x + y) \cdot y =$

12. $(1 + x) \cdot (1 + 2x) =$

13. $ab(1 + c) =$

14. $x^2 (1 + x) = x^2 + x^2 \cdot x$
$= x^2 + x^3$

Justifica la primera línea.

En la segunda línea hemos introducido en la escritura la convención

$$x^3 = x \cdot x \cdot x$$

Se dice que x^3 es el **cubo** de x.

15. Dinos qué conviene que se entienda por x^4, x^5, x^{17}!
x^4 es la cuarta potencia de x : $x^4 = x \,.\, x \,.\, x \,.\, x$

16. $(1 + x)(1 + 2x)(1 + 3x) = (1 + x)((1 + 2x)(1 + 3x))$
$= (1 + x)(1 + 5x + 6x^2)$
$= 1(1 + 5x + 6x^2) + x(1 + 5x + 6x^2)$
$= 1 + 5x + 6x^2 + x + 5x^2 + 6x^3$
$= 1 + (5x + x) + (6x^2 + 5x^2) + 6x^3$
$= 1 + 6x + 11x^2 + 6x^3.$

Justifica cada una de las etapas de este cálculo.

17. $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot (a + b) + b \cdot (a + b)$
$= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

Justifica cada uno de los pasos efectuados.

18 Aplicando la fórmula del ejercicio anterior verifica la igualdad:

$$11^2 = 121$$
$$(11^2 = (10 + 1)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 1 + 1^2).$$

19. Sea n un entero natural.
Se tiene

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1.$$

Así, se pasa de n^2 a $(n + 1)^2$ agregando $2n + 1 = n + (n + 1)$.
Esta regla se aplica para construir la tabla de los cuadrados partiendo de

$0^2 = 0$
$+ 0 + 1$
$1^2 = 1$
$+ 1 + 2$
$2^2 = 4$
$+ 2 + 3$
$3^2 = 9$
$+ 3 + 4$

$4^2 = 16$
$+ 4 + 5$
$5^2 = 25$
$+ 5 + 6$
$6^2 = 36$
etc.

20. Sabiendo que $25^2 = 625$, halla inmediatamente 26^2.

21. Da la lista de los cuadrados de 70^2 a 80^2.

22. Mira la lista del ejercicio 19.
De ella sale

$$\begin{matrix} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \\ + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \end{matrix} = 6^2$$

Luego,

$$2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 6^2 + 6 = 6(6 + 1) = 6 \cdot 7.$$

Y de aquí,

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21.$$

Calcula del mismo modo $1 + \ldots\ldots + 10$.
Y también

$$1 + 2 + \ldots\ldots + 1.000.$$

23. $(a + 2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2$.
$(2u + 3a)^2 =$

24. $(a + b + c)^2 = (a + b + c)(a + b + c)$
$= a(a + b + c) + b(a + b + c) + c(a + b + c)$
$= a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2$
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$

25. $(2x + 3g + 5z)^2 =$

26. $(x + y)^3 = (x + y) \cdot (x + y) \cdot (x + y)$
$= (x + y)(x + y)^2$
$= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$
$= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2)$
$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + yx^2 + 2xy^2 + y^3$
$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

27. $(a + 2b)^3 =$

28. $(x + 1)^3 =$

29. $(1 + x)^3 =$

30. $(1 + x + y)^3 =$

31. $(x + y + z)^3 =$

32. Escribe los cuadrados de los 30 primeros números naturales.
Escribe los cubos de los 10 primeros números naturales.
Escribe las 10 primeras potencias de 2
$2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = \ldots$, $2^{10} =$
Escribe las 5 primeras potencias de 3.

33. $10^1 = 10$
$10^2 = 100$
$10^3 = 1.000$
...
$10^{12} = \ldots$

¡Enuncia la regla!

34. ¿Cuántas funciones existen $\{1, 2\} \to \{a, b, c \ldots, y, z\}$?

35. ¿Cuántas funciones $\{1, 2, 3\} \to \{a, b, c \ldots z\}$?

36. ¿Cuántas funciones $\{1, 2\} \to \{1, 2\}$?

37. ¿Cuántas funciones $\{a, b, c\} \to \{0, 1\}$? Se supone $a \neq b \neq c \neq a$)

38. ¿Cuántas funciones $\{a, b, c, d\} \to \{0, 1\}$? (Los elementos a, b, c, d son diferentes dos a dos.)

39. Si $a = \#A$, ¿cuántas funciones hay $A \to \{0,1\}$?

40. El número de partes de A es igual al número de funciones $A \to \{0, 1\}$.
Para toda parte $P \subset A$ haremos $f_P(x) = 1$ si $x \in P$
y $f_P(x) = 0$ si $x \in A \setminus P$.

41. El número de partes de A es $2^{\#A}$.

42. Si $a = \#A$ y $b = \#B$, el número de funciones $A \to B$ es b^a.

43. Si se designa por B^A el conjunto de las funciones $A \to B$:
$$\#(B^A) = (\#B)^{\#A}$$

44. Se llama *relación de* A *a* B toda parte de $A \times B$.
Si $a = \#A$, $b = \#B$, ¿cuál es el cardinal de $A \times B$?
El número de relaciones de A a B es $2^{a \cdot b}$.

45. Si $n = \#E$, el número de relaciones definidas en E es $2^{(n^2)}$.

46. Existen 512 relaciones definidas en un conjunto de 3 elementos.

47. En un conjunto de 4 personas se pueden definir 65.536 relaciones.

En los ejercicios 48 *a* 55 *las letras designan naturales.*

48. $a^2 + ab + ac = a(a + b + c)$.

49. $ac + ad + bc + bd = a(c + d) + b(c + d)$.
$= (a + b)(c + d)$.

50 $ac + ad + ae + bc + bd + be =$

51 $ax + az + ay + bx + by + bz + cx + cy + cz =$

52. Para todo número natural n
$$1 \mid 1 \mid n \mid n \mid 0 \mid 0$$

53. Si $a \mid b \mid c \mid d \mid e \mid f \mid g \mid h \mid k \mid l \mid m \mid n$ y $f = 0$.
¿qué conclusión sacas?

54. $(a + b) \mid (a^2 + 2ab + b^2)$.

55. $(a + b) \mid (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$.

56. 7 | 392

57. ¿Encuentras algún vínculo entre los ejercicios 54, 55 y 56?

58. ¿Quieres completar esta tabla de multiplicación?

•	0	1	7	11	12	13	14	15	16	17	18	19	57
0													
1													
7												133	
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
57													

59. ¿Quieres completar la tabla de multiplicación siguiente?

•	$a+x$	a	$b+c$	$1+a$	$a+b$	$1+x+y$	y	$a+b+x+y$	0
$a+x$									
a									
$b+c$		$ab+ac$							
$1+a$									
$a+b$									0
$1+x+y$									
y									
$a+b+x+y$									
0		0							

60. Si a es el cardinal del conjunto A,

$$a^2 = \#(A \times A)$$
$$a^3 = \#(A \times A \times A).$$

61. ¿Cómo definir $A \times A \times A$?

Si $a = \#A$, $b = \#B$, $c = \#C$

$$a \cdot b \cdot c = \#(A \times B \times C).$$

¿Cómo definir $A \times B \times C$?

62. Si $a, b \in \omega$

$$(a + b) \mid (a^2 + 2ab + b^2)$$
$$(a + b) \mid (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + a^2 + 2ab + b^2 + 2a + 2b)$$
$$(a + b) \mid (ax + ay + bx + by)$$

63. Un número escrito en el sistema decimal es divisible por 2 si la cifra de las unidades es divisible por 2.

Todo número natural n se escribe $n = 10d + u$ siendo $0 \leqslant u \leqslant 9$.
El número u es la cifra de las unidades de n.

(Por ejemplo: si $n = 4758$,
se tiene $n = 10 \times 475 + 8$ ($d = 475$ y $u = 8$).)
$10d = 2 \cdot 5d$ luego $2 \mid 10d$.
Si $2 \mid u$ se tendrá $2 \mid 10$ y $2 \mid u$;
luego (teor. 4, pág. 285: $2 \mid (10d + u) = n$.

64. Todo número escrito en el sistema decimal es divisible por 5 si 5 divide a la cifra de las unidades.

65. Si 9 divide a la suma de las cifras de un número escrito en el sistema, decimal, este número es divisible por 9.

Designemos por $\overline{m\ c\ d\ u}$ el número decimal obtenido yuxtaponiendo las 4 cifras m, c, d, u.

$$\begin{aligned}\overline{m\,c\,d\,u} &= 1.000\ m + 100\ c + 10\ d + u \\ &= 999\ m + 99\ c + 9\ d + m + c + d + u \\ &= 9(111\ m + 11\ c + d) + m + c + d + u.\end{aligned}$$

Si $9 \mid (m + c + d + u)$ se tiene

$9 \mid 9\ (111\ m + 11\ c + d)$ y $9 \mid (m + c + d + u)$

luego, $9 \mid \overline{m\,c\,d\,u}$ en virtud del teor. 4, pág. 285.

66. Designemos por $s\ (n)$ la suma de las cifras del número $n \in \omega$ escrito en sistema decimal.

Queda definida así una función:

$$s : \omega \to \omega : n \to s\ (n)$$

o *transformación en* ω.

Las compuestas $s^2 = s \circ s$, $s^3 = s \circ s \circ s$ ... etc ... son igualmente transformaciones en ω.

¿Quieres probar que

$$n \geqslant s\ (n) \geqslant s^2\ (n) \geqslant s^3\ (n) \geqslant \ldots\ldots$$

Como $n, s\ (n), s^2\ (n), \ldots$ son naturales, esta cadena debe terminar en una sucesión de números iguales.

Estudia el caso del número 3.141.591.962

$$\begin{aligned}n &= 3.141.591.962 \\ s\ (n) &= 41 \\ s^2\ (n) &= 5 \\ s^3\ (n) &= 5 = s^4\ (n) = \ldots\end{aligned}$$

En este caso

$$\begin{array}{cccccccc} n & > & s\ (n) & > & s^2\ (n) = s^3(n) = s^4(n) = \ldots \\ 3.141.591.962 & > & 41 & > & 5 = 5 = 5 = \ldots \end{array}$$

Designemos por $r_1\ (n)$ la cifra finalmente obtenida así.

r es una función: $\omega \to \{0, 1, 2, 3, \ldots 9\}$.

Escribe las cadenas de los números

29, 875.324, 28, 89, 123, 123.022. 7.897.654.

67. Vamos a definir en $\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$ una ley estableciendo

$$a * b = r\,(a \cdot b)$$

igualdad en la que r es la función $\omega \to \omega$ definida en el ejercicio 66.
Así, $r\,(2 \times 3) = 6 \qquad r\,(7 \times 4) = 1$.
Construye la tabla de esta ley.

*	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2			6						
3									
4									
5									
6									
7				1					
8									9
9									

La ley $*$ así definida en $\{ 1, \ldots, 9 \}$ ¿es conmutativa, asociativa?
¿Admite un elemento neutro? ¿Admite un absorbente?
¿Todo elemento admite un simétrico?

68. Estudia la situación, análoga a la precedente, que se da al establecer

$$a * b = r\,(a + b)\,.$$

19

El sistema de numeración binaria

1 — SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Hasta aquí hemos representado los enteros naturales en el sistema de **numeración decimal.** Hay otros medios de representarlos, entre ellos la **numeración romana.**

Numeración decimal: 1 2 4 5 6 9 10 50 40 65 99 100

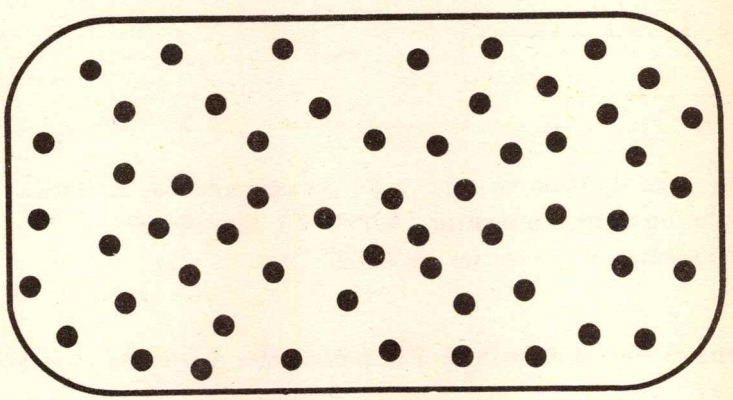
Numeración romana: I II IV V VI IX X L XL LXV IC C

Vamos a estudiar el sistema de numeración que utilizan las grandes máquinas electrónicas, que hacen hoy los cálculos más largos que exige nuestra civilización.

2 — EL SISTEMA BINARIO

Propongámonos representar el número de elementos de un conjunto finito.

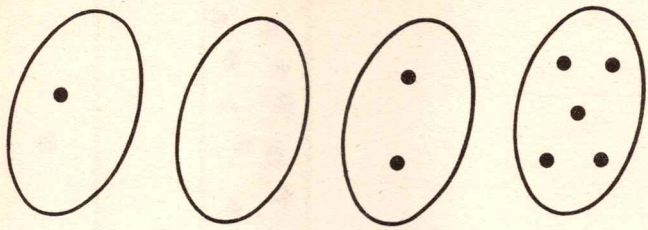
Tracemos un diagrama del conjunto y representemos por puntos **todos** los elementos del conjunto.



Este diagrama no da ninguna idea de la naturaleza de los objetos del conjunto. La **única** información que proporciona es el número de elementos del conjunto.

Este diagrama es, pues, una representación gráfica del número de elementos del conjunto.

Para pequeños conjuntos tales diagramas son muy claros.

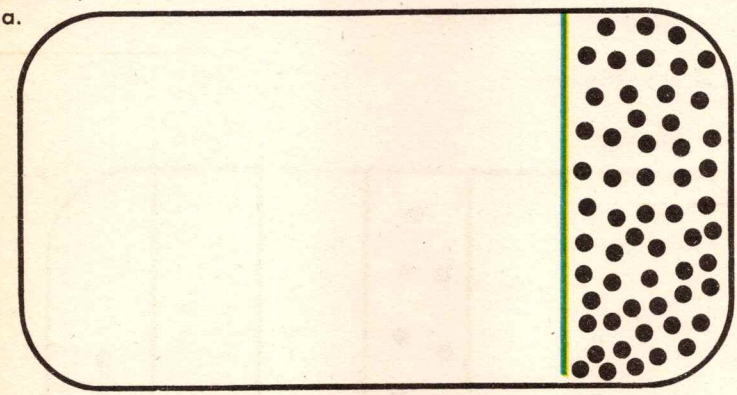


A simple vista vemos que estos diagramas representan los números uno, cero, dos, cinco.

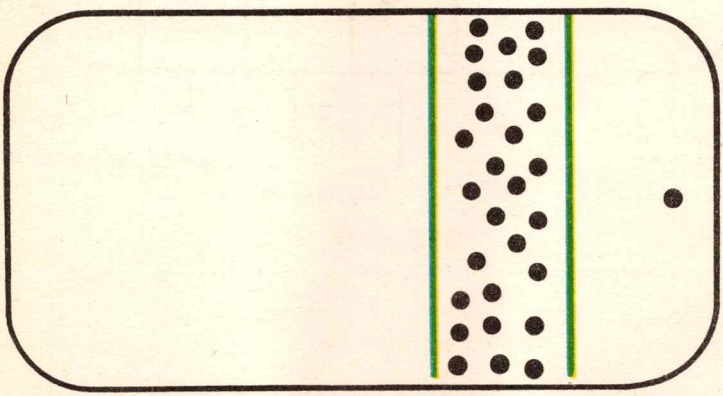
No ocurre lo mismo con el primer diagrama. A simple vista no podemos percibir el número que representa.

El sistema de numeración binaria va a permitirnos representar el número de puntos del diagrama por pocos signos.

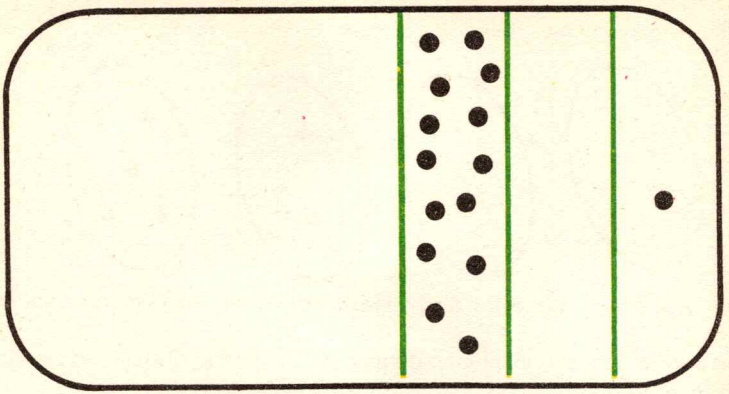
Juntemos primero todos los elementos del conjunto en la parte derecha del diagrama.



A fin de simplificar la situación, por cada dos objetos vamos a dibujar un solo punto, a la izquierda de la línea verde.

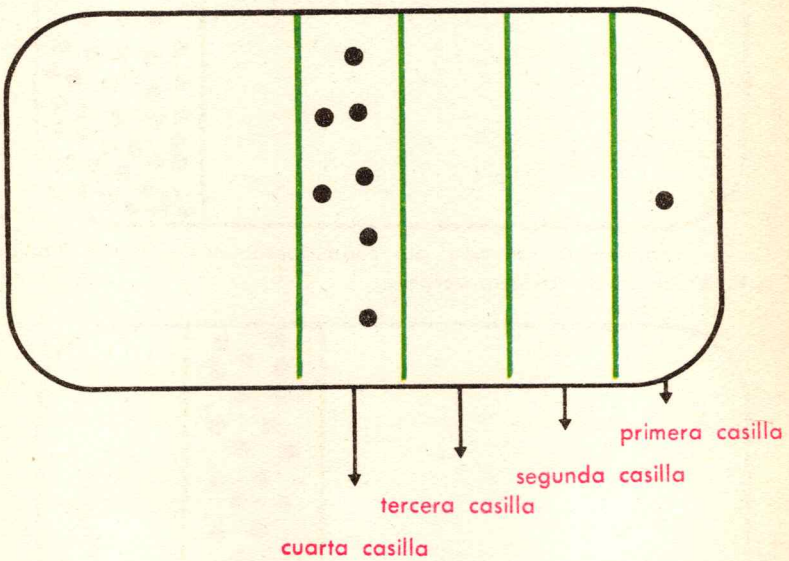


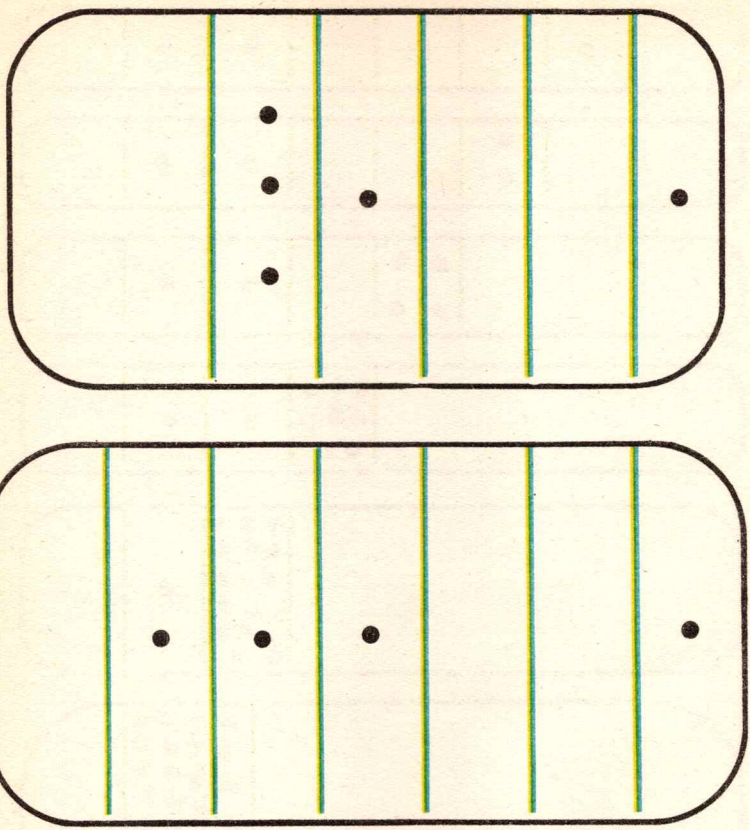
Repitamos el procedimiento:



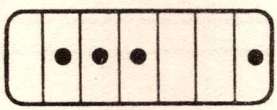
Un punto situado en la primera casilla de la derecha representa un solo objeto.
Un punto situado en la segunda casilla representa dos objetos.
Cada punto situado en la tercera casilla representa dos puntos de la segunda casilla o cuatro objetos del conjunto dado.

Se repite el procedimiento:



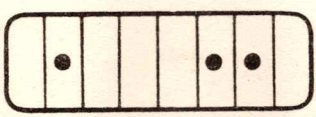


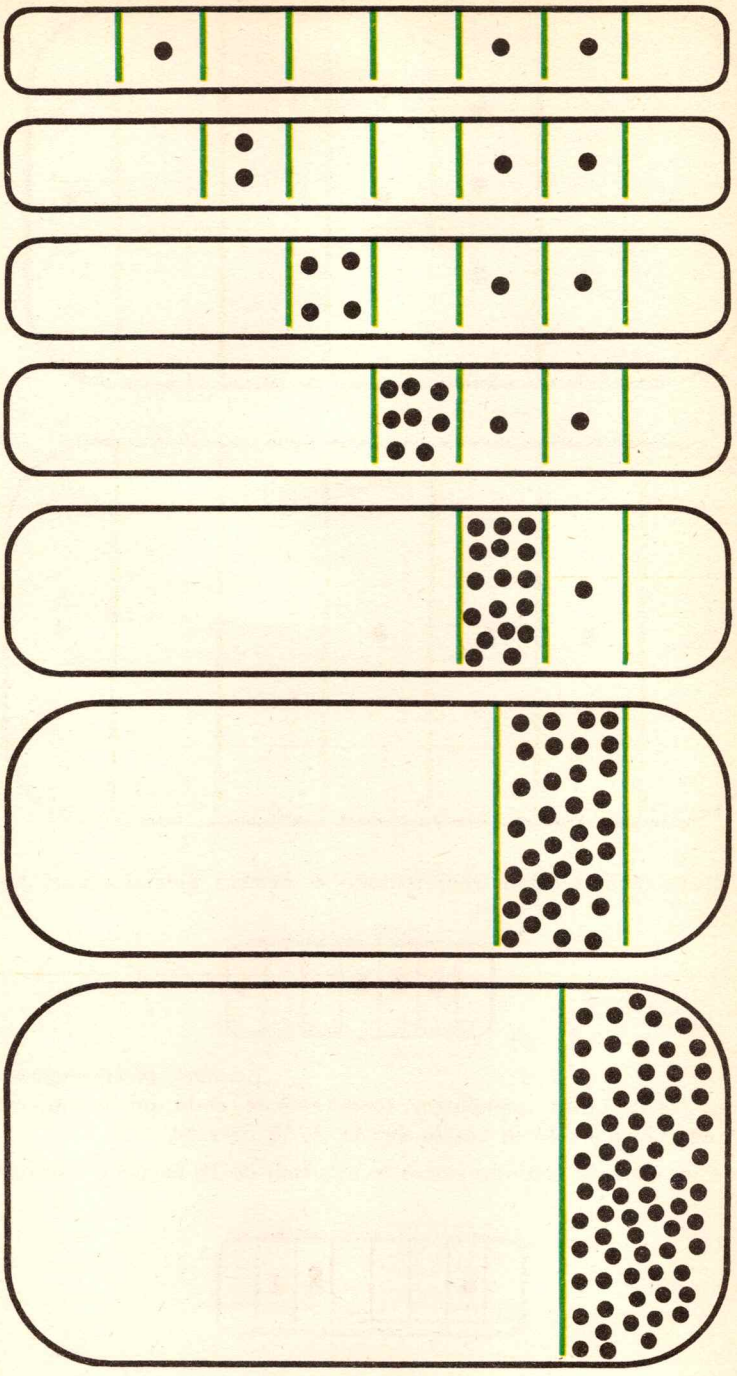
Con cuatro puntos hemos representado el número buscado, pues los datos del esquema



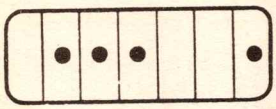
permiten efectivamente reconstruir el esquema inicial; basta reemplazar sucesivamente cada punto marcado en una casilla por dos ubicados en la casilla vecina de la derecha.

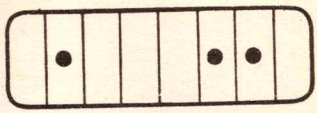
A título de ejercicio reconstruyamos el esquema de un conjunto que hubiera dado el número





Acabamos de ver que todo número (natural) puede ser representado por dibujos como éstos:





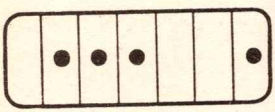
En tales dibujos cada casilla está **vacía** u **ocupada por un solo punto.**

Se conoce el número cuando, yendo de derecha a izquierda, se sabe de cada una de las sucesivas casillas si está **vacía** u **ocupada**.

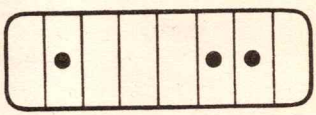
Estos dibujos se simplifican usando dos signos.

El signo 0 para las casillas vacías.
El signo 1 para las casillas ocupadas.

Admitida esta convención, representa los números abajo dibujados.



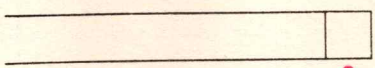
1 1 1 0 0 1



1 0 0 0 1 1 0

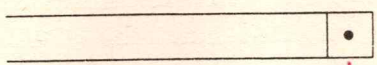
Representemos del mismo modo los primeros números naturales.

cero



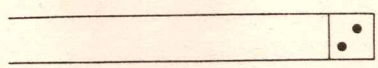
0

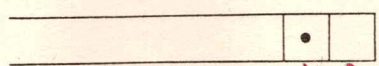
uno



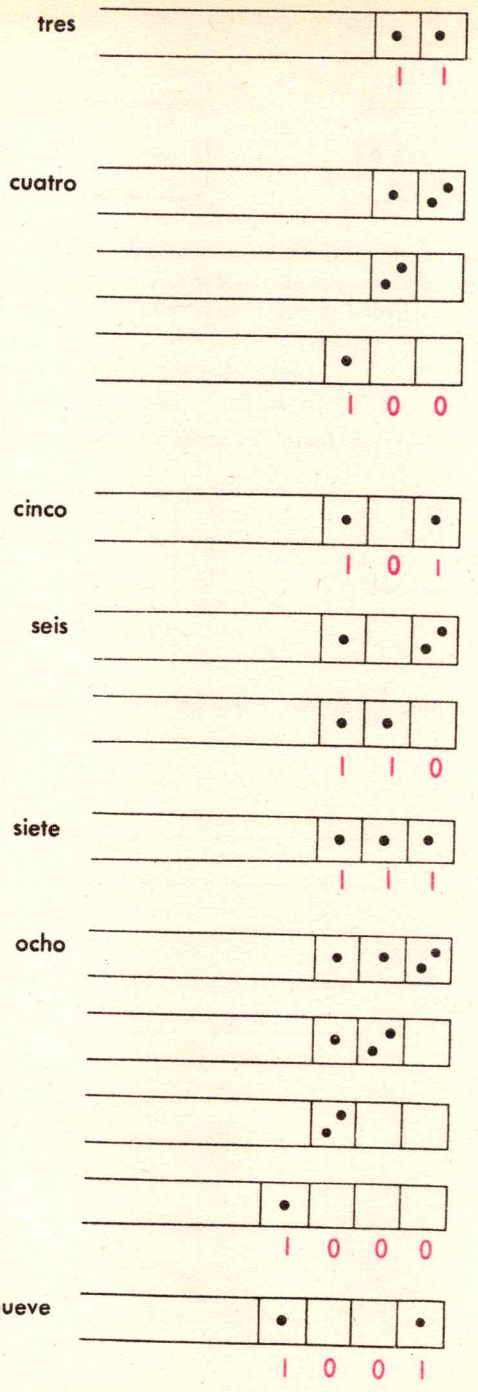
1

dos

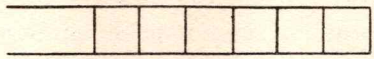




1 0


tres
1 1
cuatro
1 0 0
cinco
1 0 1
seis
1 1 0
siete
1 1 1
ocho
1 0 0 0
nueve
1 0 0 1

La tabla dividida en casillas



se llama **ábaco**

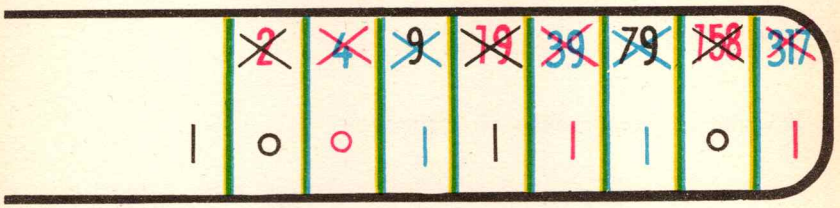
Resumamos y continuemos sin dibujos.

0	cero	11111	treinta y uno
1	uno	100000	treinta y dos
10	dos	100001	treinta y tres
11	tres	100010	treinta y cuatro
100	cuatro	100011	treinta y cinco
101	cinco	100100	treinta y seis
110	seis	100101	treinta y siete
111	siete	100110	treinta y ocho
1000	ocho	100111	treinta y nueve
1001	nueve	101000	cuarenta
1010	diez	101001	cuarento y uno
1011	once	101010	cuarenta y dos
1100	doce	101011	cuarenta y tres
1101	trece	101100	cuarenta y cuatro
1110	catorce	101101	cuarenta y cinco
1111	quince	101110	cuarenta y seis
10000	dieciséis	101111	cuarenta y siete
10001	diecisiete	110000	cuarenta y ocho
10010	dieciocho	110001	cuarenta y nueve
10011	diecinueve	110010	cincuenta
10100	veinte	110011	cincuenta y uno
10101	veintiuno	110100	cincuenta y dos
10110	veintidós	110101	cincuenta y tres
10111	veintitrés	110110	cincuenta y cuatro
11000	veinticuatro	110111	cincuenta y cinco
11001	veinticinco	111000	cincuenta y seis
11010	veintiséis	111001	cincuenta y siete
11011	veintisiete	111010	cincuenta y ocho
11100	veintiocho	110111	cincuenta y nueve
11101	veintinueve	111100	sesenta
11110	treinta	111101	senta y uno

EJERCICIOS

1. Como estás habituado al sistema decimal te voy a comunicar un número sirviéndome de ese sistema, por ejemplo, 317, y tú lo escribirás en binario.

   En lugar de colocar 317 puntos en la primera casilla de la derecha del ábaco, escribimos 317 en decimal y luego procedemos del mismo modo que con los puntos en el ábaco.



Disposición práctica

317	1
158	0
79	1
39	1
19	1
9	1
4	0
2	0
1	1

317 = 1.0011.1101

10. Convierte al sistema binario el número (decimal) 273.859 :

273859	1
136929	1
68464	0
34232	0
17116	0
8558	0
4279	1
2139	1
1069	1
534	0
267	1
133	1
66	0
33	1
16	0
8	0
4	0
2	0
1	1

273.859 = 100.0010.1101.1100.0011

11. Convierte asimismo al sistema *binario* los números que se escriben como sigue en *decimal*:

1, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000, 1.000.000 :

$$\begin{aligned}
1 &= 1\\
10 &= 1010\\
100 &= 110.0100\\
1.000 &= 11.1110.1000\\
10.000 &= 10.0111.0001.0000\\
100.000 &= 1.1000.0110.1010.0000\\
1.000.000 &= 1111.0100.0010.0100.0000
\end{aligned}$$

100. Convierte al sistema *decimal* los números que se escriben en *binario*:

1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, 10000000, ...

$$\begin{aligned}
1 &= 1\\
10 &= 2\\
100 &= 4\\
1000 &= 8\\
10000 &= 16\\
100000 &= 32\\
1000000 &= 64\\
10000000 &= 128\\
100000000 &= 256\\
1000000000 &= 512
\end{aligned}$$

101. Convierte al *decimal* los números que se escriben en *binario*:

11100011; 10101010; 100001; 11101; 100101

$$\begin{aligned}
11100011 &= 1 + 2 + 4 + 64 + 128 + 256 = 455\\
10101010 &= 2 + 8 + 32 + 128 = 170\\
100001 &= 1 + 64 = 65\\
11101 &= 1 + 4 + 8 + 16 + 32 = 61\\
100101 &= 1 + 4 + 64 = 69
\end{aligned}$$

110. Convierte al *binario* el número que se escribe en *decimal*:

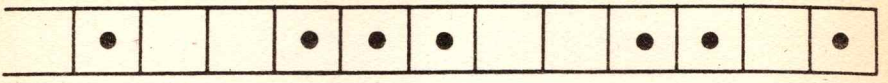
1.357.908.426

111. Mira la sucesión de números naturales escritos en binario.
¿Qué puedes decir de los numeros pares?
¿Qué puedes decir de los números divisibles por dos?
¿Cómo hacer para multiplicar un número (escrito en binario) por dos, por cuatro, por treinta y dos?

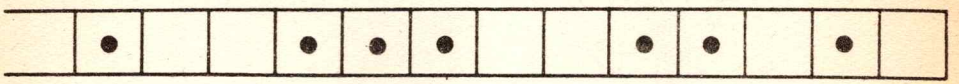
1000. Sea un número escrito en binario:

1001.1100.1101

Forma este número en el ábaco, con fichas.



1001. Si corremos cada una de las fichas a la casilla vecina de la izquierda, cada ficha representará dos veces más que antes.
En virtud de la *distributividad*, esta operación equivale a multiplicar el número dado por dos.
Efectuada la operación nos encontramos con la situación:



1.0011.1001.1010

Un número (escrito en binario) se multiplica por dos ¡escribiendo un cero a su derecha!
Se la multiplica por cuatro, escribiendo dos ceros a su derecha.
Se lo multiplica por ocho..., por sesenta y cuatro...

1001. Consultando la lista dada más arriba, verifica en binario las fórmulas *decimales*

$$56 = 7 \times 8$$
$$48 = 3 \times 16$$

1010. Escribe en binario el número de partes de un conjunto de siete elementos

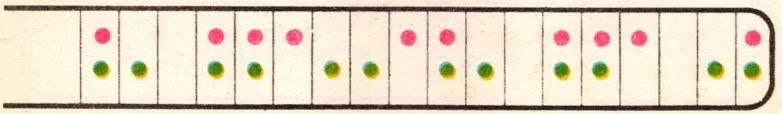
1011. Escribe en binario el número de relaciones de A a B sabiendo que A tiene tres elementos y B siete.

3 — ADICIÓN EN EL BINARIO

Propongámonos sumar estos números escritos en binario:

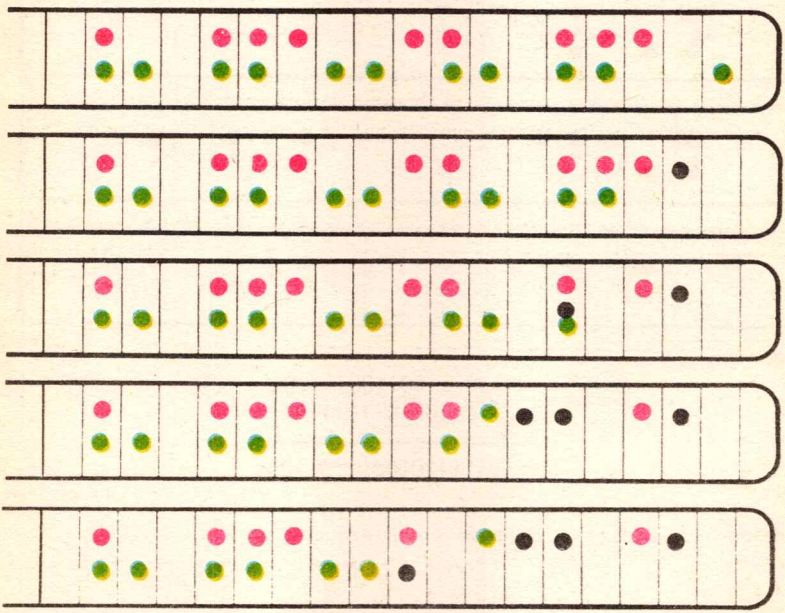
1001110011001111001
1101101101101110011

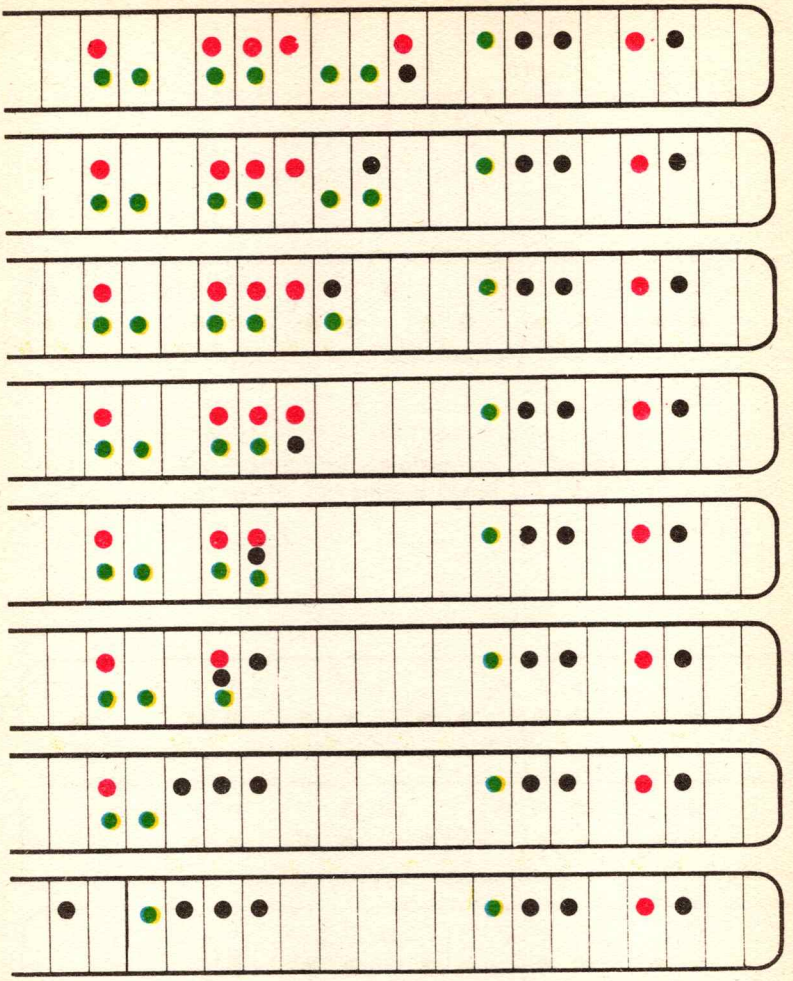
Formémolos en el ábaco con fichas rojas y fichas verdes.



Apliquemos la regla del binario: una ficha en una casilla representa el doble que una ficha colocada en la casilla inmediata de la derecha.

Representemos en negro las fichas nuevas que entran en una casilla:

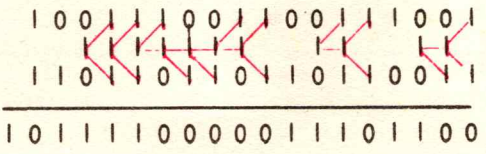




Luego,

$$\begin{array}{r} 1001\,1001\,1001\,1001 \\ +\ 1101\,1011\,1011\,0011 \\ \hline 1011\,1000\,0011\,0100 \end{array}$$

El método utilizado está resumido en el esquema



EJERCICIOS

1. Suma en binario los números 7 y 8.
En binario, 7 se escribe 111
8 se escribe 1000
La suma es, pues, 1111

10. Convierte al binario 45 y 187.
Súmalos en el sistema binario.
Convierte la suma al sistema decimal:

45	1
22	0
11	1
5	1
2	0
1	1
0	

187	1
93	1
46	0
23	1
11	1
5	1
2	0
1	1
0	

10111011
10110100
11101000 $8 + 32 + 64 + 128 = 232$

11. Convierte al binario 263, 789, 1025.
Suma los binarios. Reconvierte la suma al decimal.
Verifica.

100. ¡Suma!

11111111111
1
100000000000

11111
1
100000

11111111111
11111
1000000011110

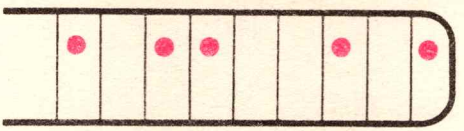
11111111111
1111000
1000001110111

11111111111
11100100

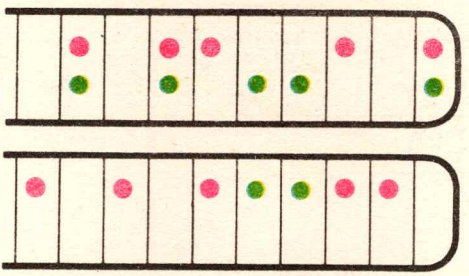
¿Podrías enunciar algunas reglas de cálculo binario?

4 – COMPARACIÓN DE NÚMEROS ESCRITOS EN SISTEMA BINARIO

Representa un número en binario ubicando algunas fichas rojas en el ábaco.



Representa un segundo número con fichas verdes.
¡Suma!



La suma así obtenida es un número mayor que los números dados.
En resumen:

$$1.0110.0101 + 1.0101.1001 = 10.1011.1110$$

Luego (cap. 17, teor. 2, pág. 267)

$$1.0110.0101 < 10.1011.1110$$
$$1.0101.1001 < 10.1011.1110$$

— ¿Podrías decirme cuál es el mayor de los números que tienen a lo sumo siete cifras (en binario)?

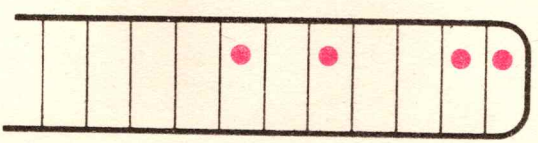
— Es el número

$$111.1111$$

— ¿Por qué?

— ...

— Para formar cualquier otro número de siete cifras binarias (a lo sumo) habrá que colocar una, y solo una, ficha en ciertas de las siete primeras casillas.



Para obtener 111.1111, basta colocar fichas verdes en aquellas de las siete primeras casillas que quedaron vacías.

El número representado por las fichas verdes es 10.1100

Así,

$$101.0011 + 10.1100 = 111.1111$$

Luego,

$$101.0011 \leqslant 111.1111$$

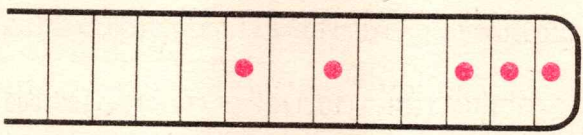
(aplicando siempre el teorema 2 del cap. 17, pág. 267).

— ¿Cuál es el menor de los números que tienen exactamente ocho cifras binarias?

— 1000.0000

— ¿Por qué?

— Cualquier otro número *a* de, exactamente, ocho cifras binarias, se representa colocando una ficha en la casilla octava y una ficha en ciertas casillas anteriores.



Se pasa, pues, de 1000.0000 a este número *a* agregando algunas fichas, es decir, efectuando una adición.

Se tiene $1000.0000 + 10.0111 = 1010.0111$

Por lo cual, $1000.0000 \leqslant 1010.0111$

¿Cuál de los dos números siguientes es mayor?

— Se tiene

$$111.1111 \quad y \quad 1000.0000$$

$$111.1111 < 1000.0000$$

puesto que

$$111.1111 + 1 = 1000.0000$$

Todo número que tiene exactamente ocho cifras binarias es mayor que todo número de siete cifras a lo sumo.

De dos números escritos en binario el más largo es el mayor.

Sea *a* un número de diecisiete cifras binarias y *b* un número de nueve cifras binarias.

— Se tendrá $b < a$.

— ¿Por qué?

— $b \leqslant 1.1111.1111 < 1111.1111.1111.1111 < 1.0000.0000.0000.0000 \leqslant a$.

— Comparemos, por último, dos números de igual número de cifras binarias.

Representemos estos números por fichas rojas y verdes.

Leamos estos números de *izquierda a derecha*.

En la primera casilla (de izquierda a derecha) hay una ficha roja y una ficha verde, puesto que ambos números tienen el mismo número de cifras.

Si todas las otras casillas están vacías u ocupadas por dos fichas, los números son iguales.

Si no, existe una primera casilla en la cual hay una sola ficha.

El color de esta ficha es el color del mayor de los dos números.

Por ejemplo:

$$11.1010.1001.1110.1101 < 11.1010.1100.0001.0101$$

Destaquemos los comienzos idénticos de estos números:

$$11.1010.1001.1110.1101 \qquad 11.1010.1100.0001.0101$$

Sabemos ya que

$$1.1110.1101 < 100.0001.0101$$

Luego,

$$11.1010.1000.0000.0000 + 1.1110.1101 < 11.1010.1000.0000.0000 + 100.0001.0101$$

es decir,

$$11.1010.1001.1110.1101 < 11.1010.1100.0001.0101$$

EJERCICIOS

1. *Ordena* los números siguientes escritos en numeración binaria:

   11.0101.1011 ; 11.1111.1111 ; 11.0100.1110 ; 100.0000.0000
   11.0101.1101 ; 11.0101.0111 ; 11.0100.1110 ; 11.0101.1110

   Verifica pasando los números a la numeración decimal.

2. Escribe en numeración binaria el mayor de los números de doce cifras que tienen exactamente seis cifras 1.

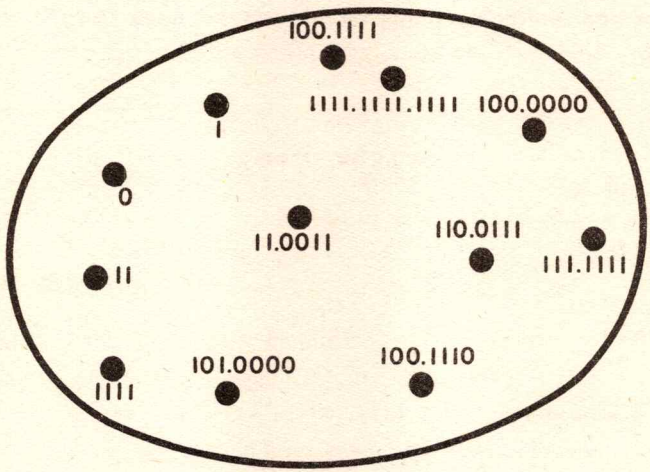
   Escribe también el menor de los números de doce cifras que tienen exactamente seis cifras 1.

3. ¿Cómo reconoces los múltiplos de ocho (en numeración binaria)?

4. Escribe en numeración binaria el menor de los números de quince cifras que tienen exactamente cuatro cifras 0.

   Escribe además el mayor de los números de quince cifras que tienen exactamente cuatro cifras 0.

5. Haz un gráfico de la relación $\leqslant$ en el conjunto representado a continuación:



6. El mayor de los números de doce cifras binarias que tienen exactamente tres cifras 1 es divisible por 512.

5 — MULTIPLICACIÓN DE ENTEROS NATURALES EN EL SISTEMA BINARIO

Propongámonos efectuar la multiplicación

$$11.0101 \times 1.0110$$

Sabemos que

$$1.0110 = 10 + 100 + 1.0000$$

La multiplicación es distributiva respecto de la adición (cap. 18, teor. 1, pág. 282).

Luego

$$\begin{aligned} 11.0101 \times 1.0110 &= 11.0101 \times (10 + 100 + 1.0000) \\ &= 11.0101 \times 10 + 11.0101 \times 100 + 11.0101 \times 1.0000 \\ &= 110.1010 + 1101.0100 + 11.0101.0000 \end{aligned}$$

Disposición práctica:

```
      11.0101
       1.0110
  ------------
     110.1010
    1101.01
 11.0101
 ------------
100.1000.1110
```

Para efectuar multiplicaciones en binario no hace falta aprender tablas de multiplicar.

EJERCICIOS

1. $1^{10} =$
   $11^{10} =$
   $111^{10} =$
   $1111^{10} =$
   $1.1111^{10} =$
   $11.1111^{10} =$ Enuncia una regla del cálculo binario.

2. Convierte los números 1, 11, 111, 1111, 11111, 111111 en decimales. Busca sus cuadrados y escribe éstos en binario.

3. Efectúa 12345 × 6789.
   Convierte estos números al binario. Efectúa el producto en binario. Reconvierte el resultado al sistema decimal.

4. Escribe la tabla de Pitágoras en binario.

•	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001
1	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001
10	10	100	110	1000	1010	1100	1110	10000	10010
11	11	110							
100	100	1000	1100	10000	10100	11000	11100	100000	100100
101	101	1010							
110	110	1100							
111	111	1110							
1000	1000	10000							
1001	1001	10010							

5. ¡Felices jóvenes de la civilización binaria, he aquí vuestra tabla de multiplicación!

•	1
1	1

LEIBNIZ
(1646-1716)

Leibniz nació en Leipzig y estuvo casi toda su vida al servicio de los duques de Hannover.

Este gran pensador tenía un espíritu universal. Se ocupó de historia, de derecho, de lingüística, de teología, de matemática, de geología, de la construcción de máquinas de calcular, de biología, de máquinas de vapor. Estudió el sánscrito y consagró una parte importante de su tiempo a investigaciones genealógicas para defender los intereses de aquellos que lo remuneraban. Fue un viajero infatigable.

Tenía la conciencia de la unidad de la ciencia y quiso inventar una lengua universal que habría permitido facilitar descubrimientos en todos los dominios. Esto lo llevó a establecer las bases de la lógica simbólica y a introducir gran número de nuevos símbolos matemáticos. Fue dentro de este marco que introdujo el *cálculo binario*. Su mayor descubrimiento es el del *cálculo diferencial*, que hoy es un instrumento esencial en todas las ciencias, lo cual realiza en parte el sueño unitario de Leibniz.

La palabra *función* fue introducida por Leibniz en 1694.

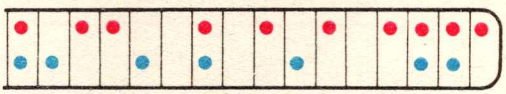
20

Los enteros racionales

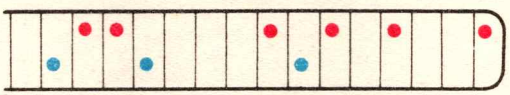
1 — UNA BATALLA A MUERTE O LOS NÚMEROS NEGATIVOS

En nuestro ábaco un ejército de fichas rojas y un ejército de fichas azules van a combatir sin piedad hasta la exterminación completa de uno de los ejércitos.

Coloquemos reglamentariamente a los combatientes de ambos campos en el ábaco: nunca, más de una ficha de un color por casilla.

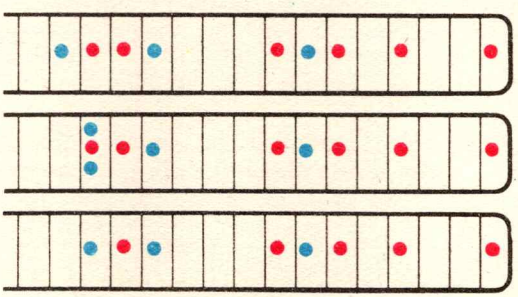


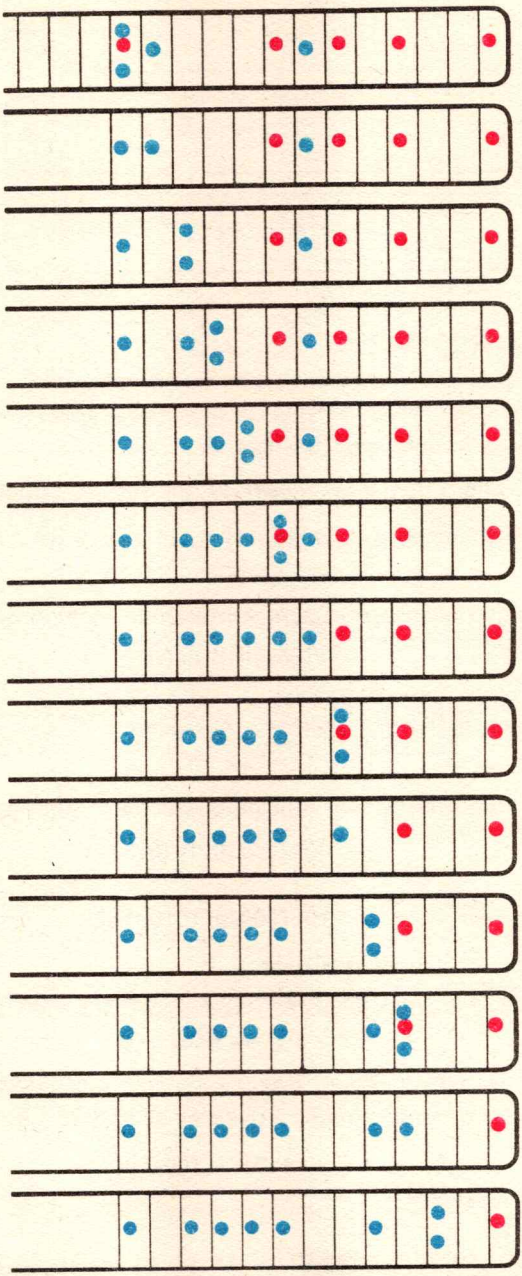
Cuando una ficha roja y una ficha azul se encuentran en la misma casilla, en el acto se matan mutuamente.

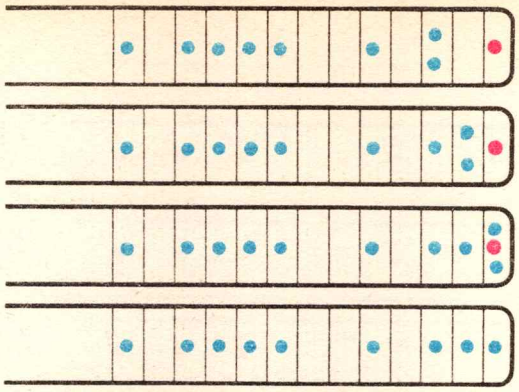


Sabemos que una ficha de un color puede ser reemplazada por **dos fichas del mismo color** ubicadas en la casilla vecina de la derecha.

Los dibujos siguientes describen el desarrollo de las hostilidades.







¡El ejército azul ha vencido!

Si sumáramos el número definido por los sobrevivientes azules al número definido por el ejército rojo inicial obtendríamos el número azul inicial.

Diremos que la batalla aquí descrita es

una adición de números de signos opuestos.

A su entrada al campo de batalla, las fichas azules definían el número

1100.1010.0100.0110

Vamos a señalar que este número está escrito en azul escribiendo

— 1100.1010.0100.0110

Un número tal se llama **negativo**.

Las fichas rojas definían inicialmente el número

1011.0010.1010.1111

Señalaremos que este número está representado en rojo escribiendo

+ 1011.0010.1010.1111

o, para abreviar

1011.0010.1010.1111

Tales números se llaman **positivos**.

El número cero es el único que puede ser considerado indiferentemente, rojo o azul.

$$0 = -0 = +0$$

Cero es el único número que es a la vez positivo y negativo.

El *resultado* de la batalla antes descrita es el número (azul) que indicaremos

— 1.0111.1001.0111

es la *suma de los números*

— 1100.1010.0100.0110 *y* + 1011.0010.1010.1111

Se escribirá

$$(-\ 1100.1010.0100.0110) + (+\ 1011.0010.1010.1111) =$$
$$(+\ 1011.0010.1010.1111) + (-\ 1100.1010.0100.0110) = -\ 1.0111.1001.0111$$

La notación se simplifica si se escribe

$$1011.0010.1010.1111 - 1100.1010.0100.0110$$

en lugar de

$$(+\ 1011.0010.1010.1111) + (-\ 1100.1010.0100.0110)$$

Vamos a establecer que $Z = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3 \ldots \}$

Los elementos de Z se llaman **enteros racionales.**

Los números positivos y negativos van a resultar útiles cada vez que se esté en presencia de acciones antagónicas, o sea muy a menudo.

EJERCICIOS

1.

$1101 - 1.0000 = ?$	$1101 + 1.0000 = ?$
$1.0000 - 1101 = ?$	$1.0000 + 1101 = ?$
$1101 - 1101 = ?$	$(-1101) + (-1101) = ?$
$-1101 + 1101 = ?$	$(-1101) + (-1111) = ?$

Observa que -1101 y -1111 designan números del mismo signo, representados por fichas del mismo color.
¡Los sumamos como de costumbre!
Escribimos, además, $-1101\ -1111$ en lugar de $(-1101) + (-1111)$

2.

$15 - 8 = 15 + (-8) =$	$87 - 125 =$
$25 + 8 =$	$127 + 85 =$
$8 + 15 =$	$-12 - 13 = (-12) + (-13) =$
$-15 + 8 =$	$13 + 12 =$
$-8 + 15 =$	$-5 - 8 =$

No olvides que escribimos $-5\ -8$ en vez de $(-5) + (-8)$.

3. Te doy dos números de signos opuestos.
¿Puedes prever el signo de su suma?
¿Cuál es el signo de $17 - 87$?
$5 - 12$?
$1000 - 1$?

4.

$-5 + \ldots\ldots = 8$	$\ldots\ldots + 1458 = -36$
$-17 + \ldots\ldots = 12$	$25 + \ldots\ldots = -32$
$-15 + \ldots\ldots = 17$	$-19 - 152 =$
$-13 + \ldots\ldots = 0$	$-52 + \ldots\ldots = 85$
$-5 + \ldots\ldots = 0$	$-2 - \ldots\ldots = -11$
$\ldots\ldots + 287 = 0$	

2 — CAMBIO DE SIGNO

— Piensa un **entero racional**.

— . .

— Designémoslo por a.

¡Atención!

Si has pensado 2 $\quad a = 2 = +2.$

Si has pensado 1966 $\quad a = 1966 = +1966.$

Si has pensado —87 $\quad a = -87.$

No pierdas de vista que a designa un **entero racional**, es decir,

un natural provisto de un signo.

Se designa por $-a$ el número a cambiado de signo (o de color).

Así:

Si $a = 2$:	$-a = -2$
Si $a = 1966$:	$-a = -1966$
Si $a = -87$:	$-a = +87 = 87$
Si $a = -3$:	$-a = 3$
Si $a = 0$:	$-a = 0$

$-(-a) = a$

Dibuja algunas flechas de la función

$$Z \to Z \ : \ z \to -z.$$

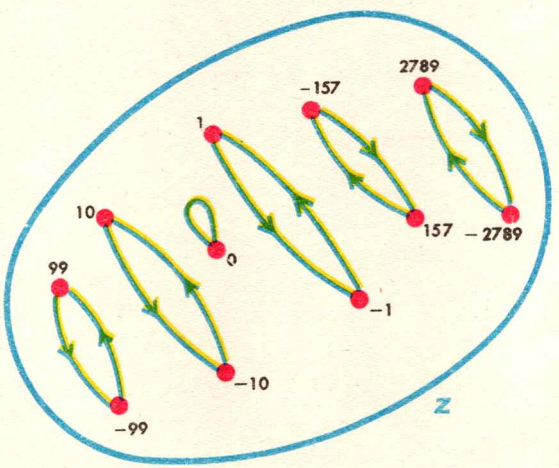


GRÁFICO 143

Como ves, esta función es igual a su recíproca . . . que es, entonces, una función.

Así, $Z \to Z : z \to -z$ *es una* **permutación** en Z.

Piensa de nuevo un entero racional y designémoslo por *b*.

Piensa en la suma $(-a) + (-b)$.

La batalla $(-a) + (-b)$ no es otra que la batalla $a + b$, ¡pero cada combatiente ha cambido su uniforme por el del otro bando!

¡El resultado es, pues, el mismo pero cambiado de color!

$$(-a) + (-b) = -(a + b)$$

$$-(a + b) = (-a) + (-b)$$

Este último hecho se expresa diciendo que la **permutación**

$$Z \to Z \ : \ z \to -z$$

respeta la adición.

Para simplificar la escritura se conviene que

$$-a - b = (-a) + (-b)$$
$$a - b = \quad a + (-b)$$

De aquí la fórmula

$$-(a + b) = -a - b$$

EJERCICIOS

(En estos ejercicios cada una de las letras designa un entero racional).

1.

$a =$	87	$-a =$
$a =$	-13	$-a =$
$a =$	0	$-a =$
$-a =$	-1	$a =$
$-a =$	7	$a =$
$b =$	-1987	$-b =$
$-c =$	0	$c =$
$-c =$	1.000.000	$c =$

2. Piensa un entero racional; designémoslo por *a*.
Se tendrá siempre

$$a - a = a + (-a) = (-a) + a = -a + a = 0$$

3. Este comerciante ha comprado café por $ 10.000. Lo revende a $ 8.000. ¿Cuál es su **ganancia**?

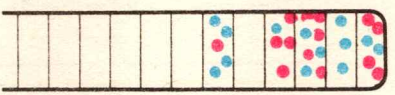
4. El examen de matemática que hay que dar para ingresar en cierta escuela consta de varias preguntas que valen en total 450 puntos. Para aprobar el examen basta obtener la mitad de puntos.
Ramón obtuvo 227 puntos. ¿Cuántos puntos le **faltan** para aprobar el examen?

5.

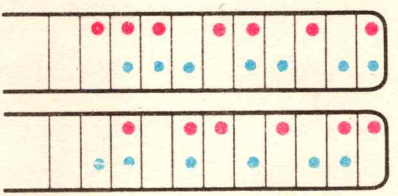
$-(2+3) = -2-3$		$-(-12-5) =$
$-(4+7) =$		$-(a+b) =$
$-(25+12) =$		$-(x+y) =$
$-(2-3) = -2+3$		$-(x-y) =$
$-(12-8) =$		$-(-x+y) =$
$-(57-102) =$		$-(-u-v) =$
$-(-25+7) = 25-7$		$-(x+2) =$
$-(-2+9) =$		$-(3-x) =$
$-(-12+3) =$		

6. $x = a - b \iff -x = -a + b = b - a$

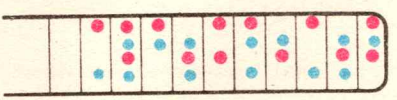
7. ¿Cuál es el número representado en este ábaco?



8. ¿Cuáles son los dos números representados en estos ábacos?



¿Cuál es la suma de estos números?
Es el número representado en el ábaco de abajo.



9. Si f designa la permutación $Z \to Z : x \to -x$, la compuesta $f^2 = f \circ f$ es la transformación idéntica en Z.

3 — PROPIEDADES DE Z

Hemos visto que **la ley + está definida en todo el conjunto Z:**

Si cada una de las letras ***a, b*** *designa un entero racional, entonces* $a + b$ *es un entero racional.*

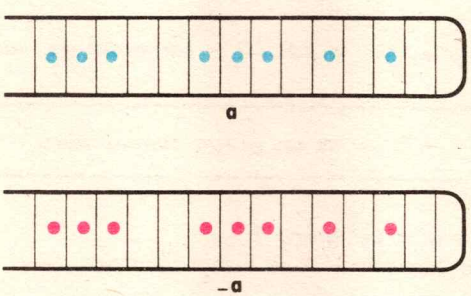
Para hallar $a + b$ se puede utilizar el ábaco. Vamos a representar los números positivos por fichas rojas y los negativos por azules.

Si el ábaco está cubierto de fichas de un solo color se aplica simplemente la regla del binario. Si el ábaco está ocupado por fichas de dos colores se da la batalla como en el parágrafo precedente.

Se ve claramente que

$$a + b = b + a$$
$$a + 0 = 0 + a$$
$$a + (-a) = -a + a = 0$$

Recordemos que $-a$ **es el número que se obtiene a partir de** a **cambiándole el signo** (o el color).



Sean a, b, c tres enteros racionales.

Representemos cada uno de ellos en el ábaco por una línea de fichas rojas o azules.

Las dos primeras líneas representan, entonces, el número $a + b$.

Las tres primeras líneas representan, entonces, el número $(a + b) + c$.

Las dos últimas líneas representan el número $b + c$.

El número representado por todas las fichas del ábaco es, pues, también $a + (b + c)$.

Acabamos de mostrar que la **adición de los enteros** racionales es **asociativa.**

Dicho de otro modo: Si cada una de las letras a, b, c designa un entero racional

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Nos estará permitido entonces omitir los paréntesis:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$$

Acabamos de ver que

Si $a, b \in Z$	entonces $a + b \in Z$
Si $a, b, c \in Z$	entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$
Si $a \in Z$	entonces $a + 0 = 0 + a = a$
Si $a \in Z$	entonces $-a \in Z$ y $(-a) + a = a + (-a) = 0$

El conjunto de todas las propiedades recuadradas se expresa en una sola frase diciendo que

Z, + es un grupo.

Como sabemos, además, que la adición es **conmutativa**, vamos a precisar:

Z, + es un grupo conmutativo.

El número 0 es el **neutro** del grupo Z, +.
Para todo $z \in Z$, el elemento $-z$ se llama ***simétrico*** de z.

EJERCICIOS

1. ω, + no es un grupo.

2. $2Z = \{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, 8, -8, \ldots\}$ es el conjunto de los números que se representan en el ábaco dejando vacía la casilla extrema de la derecha. ¿Qué puedes decir de la suma de dos de tales números? La adición en este conjunto es asociativa y conmutativa.
   Si $a \in 2Z$, ¿qué puedes decir de $-a$?
   Ahora puedes afirmar que $2Z$, + es un grupo conmutativo.

3. $\{0\}$, + es un grupo conmutativo.

4. (Las letras designan enteros racionales.)

$-(2+5+6) = -2-5-6$

$-(2-5+6) =$

$-(7-9+11) =$

$-(-5+9+217) =$

$-(a-b+c-d) =$

5. Si cada una de las letras designa un entero racional,

$87+2-2 = 87$
$98-2+2 = 98$
$-57+2-2 =$
$-63-2+2 =$
$-19+21-21 =$
$153+a-a =$

$7+83-7 = 83$
$-5+97+5 = 97$
$-98+3+98 = 3$
$-99-b+b =$
$a+b-b =$
$b-a+a =$

6. Si cada una de las letras designa un entero racional,

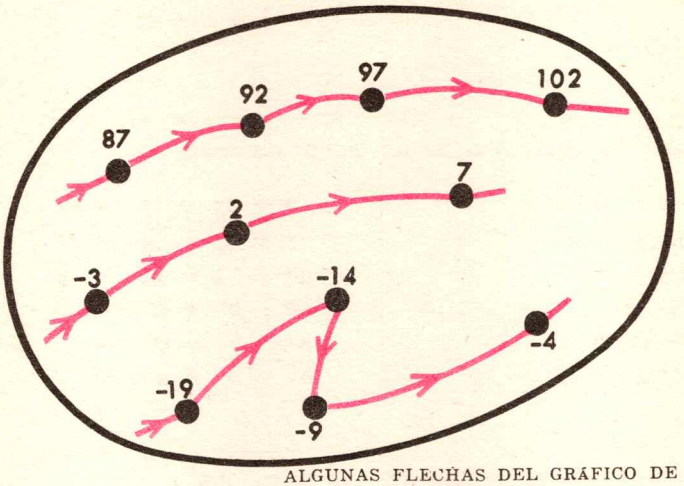
$a+b=c \iff a=c-b$
$x+a=b \iff x=b-a$
$x+7=2 \iff x=$
$9+x=7 \iff x=$

7. Si cada una de las letras designa un entero racional,

$2-x=7 \iff x-2=-7 \iff x=-7+2$
$9-x=-3 \iff \iff x=$
$-2-x=-1 \iff \iff x=$

4 — ECUACIONES EN Z,+

Representa en un diagrama algunos enteros racionales y traza todas las flechas que pertenezcan a la función $Z \to Z : x \to x + 5$:



ALGUNAS FLECHAS DEL GRÁFICO DE LA FUNCIÓN

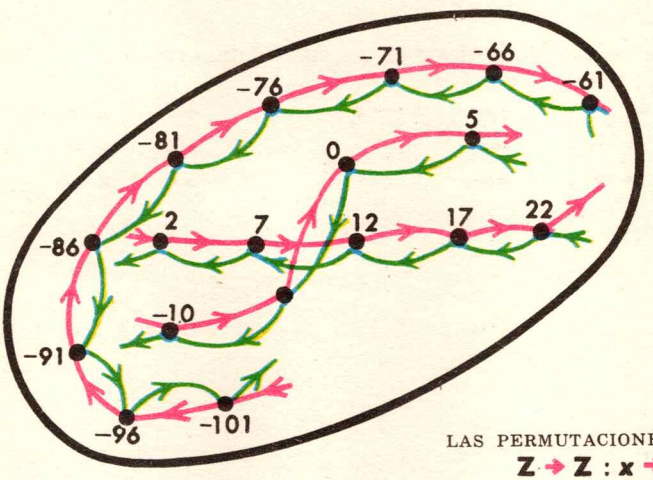
$Z \to Z : x \to x + 5$

GRÁFICO 144

¿Cuál es la relación recíproca de esta función?

— Es la **función** $Z \to Z : x \to x - 5$.

— Como la recíproca de la función $x \to x + 5$ es una función, $x \to x + 5$ y $x \to x - 5$ son **permutaciones recíprocas.**



LAS PERMUTACIONES RECÍPROCAS

$Z \to Z : x \to x + 5$

$Z \to Z : x \to x - 5$

GRÁFICO 145

EJERCICIOS

1. En el gráfico 145 ha sido omitido un número.
¿Quieres reparar ese olvido?

2.

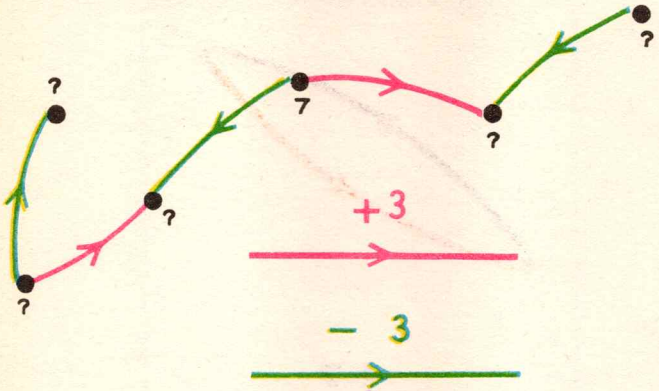


GRÁFICO 146

3.

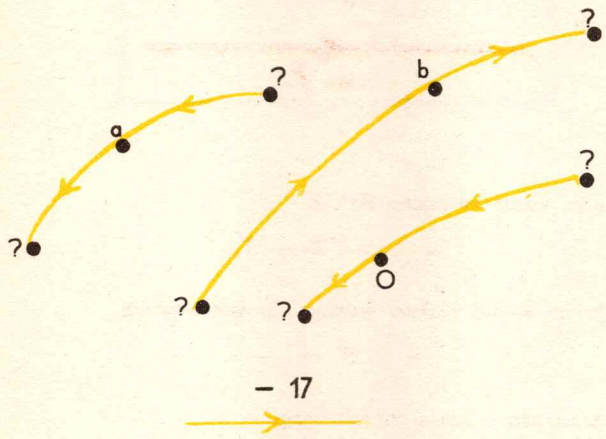


GRÁFICO 147

Dibuja en azul la permutación recíproca.

¿Quieres expresar la información x + 7 = − 2 por un fragmento de gráfico?

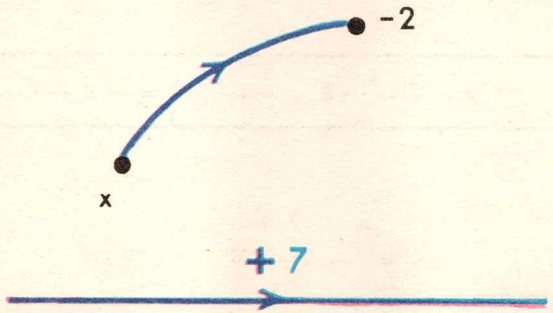
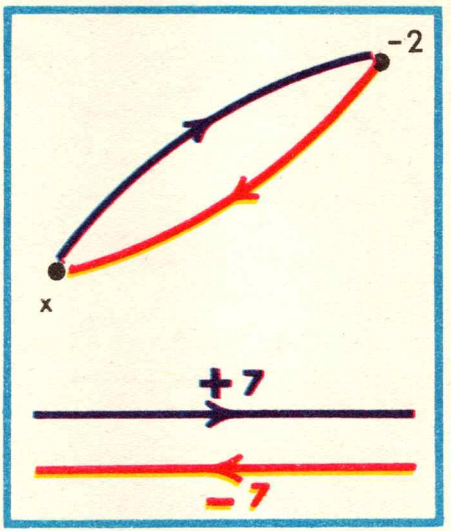


GRÁFICO 148

Representa la relación reciproca:



¿Qué conclusión sacas respecto de x?

$$x = -2-7.$$

En este dibujo la flecha violeta traduce la información

$$x + 7 = -2.$$

La flecha anaranjada traduce la información

$$x = -2-7.$$

Cada una de estas flechas nos permite trazar la otra. Luego,

$$x + 7 = -2 \iff x = -2-7$$

Pasar de

$$x + 7 = -2$$

a

$$x = -2-7 = -9$$

es **resolver la ecuación** $x + 7 = -2$.

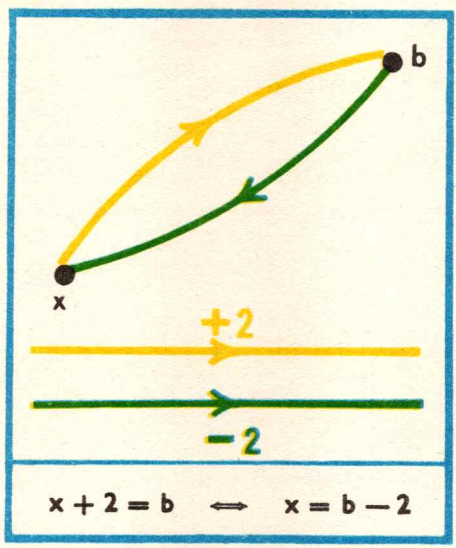
EJERCICIOS

En los ejercicios siguientes las letras a, b, c designan enteros racionales.

1. ¿Quieres resolver las ecuaciones siguientes?

$x + 2 = 2$	$x - 2 = 2$
$x + 2 = 1$	$x - 2 = 1$
$x + 3 = 7$	$x - 3 = 7$
$x + 3 = 6$	$x - 3 = 6$
$x + 3 = 3$	$x - 3 = 3$
$x + 3 = 2$	$x - 3 = 2$
$x + 3 = 0$	$x - 3 = 0$
$x + 17 = 58$	$x - 17 = 58$
$x + 58 = 17$	$x - 58 = 17$
$x + 15 = -2$	$x - 15 = -2$
$x + 15 = 0$	$x - 15 = 0$
$x + 15 = -3$	$x - 15 = -3$
$x + 27 = 3$	$x - 27 = 3$

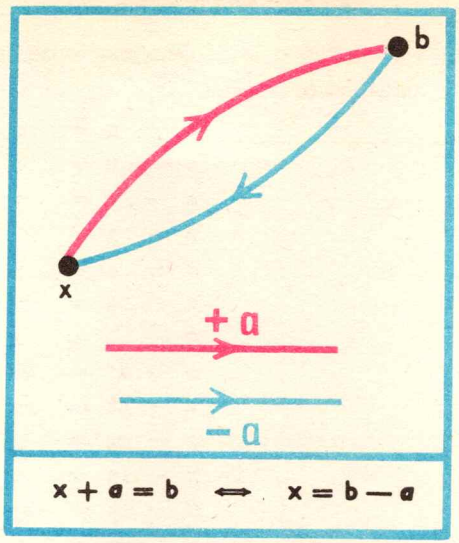
2.



¿Quieres resolver las ecuaciones siguientes?

$x + 2 = b$	$x - 2 = b$
$x + 3 = b$	$x - 3 = b$
$x + 17 = b$	$x - 17 = b$
$x + 58 = b$	$x - 58 = b$
$x + 15 = b$	$x - 15 = b$
$x + 27 = b$	$x - 27 = b$

3.



¿Quieres resolver las ecuaciones

$x + a = b$
$x - a = b$
$x + a = -b$
$a + x = b$

$x + a.b = c$
$x + a.c = b$
$x + b.c = a$
$x - a.c = b$
$-x - a = b$

4. ¿Quieres resolver la ecuación $-x - a = b$?

$(-x - a = b \iff -x = b + a \iff x = -b - a)$

5. ¿Quieres resolver las ecuaciones

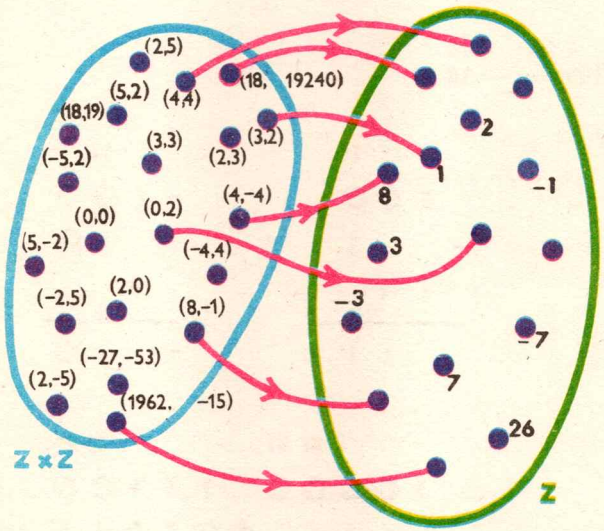
$b - x = a$
$1000 - x = 7$
$ac - x = -b$
$7 = 3 - x$
$x - 7 = 9$
$x - 2 = 0$
$-13 + x = 0$
$x - (a + b) = c$
$a + b + x = c$

$0 = -x + 385$
$-x = 1287$
$-2 - x = -2$
$-5 = -4 + x$
$-x - 97 = 0$
$5 = -x + 1953$
$-1217 - x = -1.000.000$
$b - x = a + c$
$b - a + x = -c$

5 — RESTA

DEFINICIÓN 1 — *Si cada una de las letras* **a**, **b** *designa un entero racional, el número* **a** — **b** se llama diferencia de **a** y **b**. La operación que aplica todo par *de enteros racionales sobre su diferencia se llama resta.*

Completa el gráfico siguiente:



$$Z \times Z \to Z : (x, y) \to x - y.$$

SUSTRACIÓN EN **Z**

GRÁFICO 149

EJERCICIOS

1. Completa el gráfico 149.

2. $1 - 0 = 1 \neq -1 = 0 - 1$.
Luego, la resta *no* es conmutativa.
Justifica este razonamiento.

3. Si cada una de las letras a, b designa un entero racional,

$$a = -a \iff a = 0$$
$$a - b = b - a \iff a = b$$

4. $1 - (1 - 1) = 1 \neq -1 = (1 - 1) - 1$

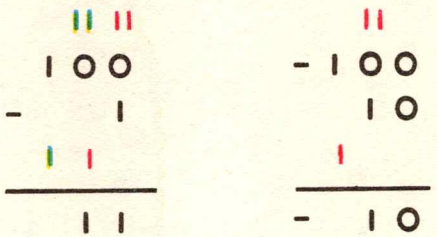
Luego, la resta *no* es asociativa.
¡Explica!

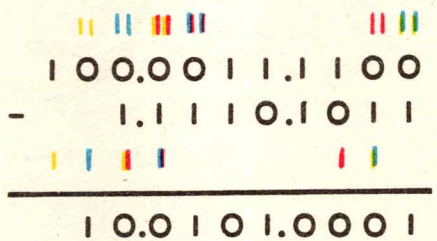
5. Si cada una de las letras a, b, c designa un entero racional,

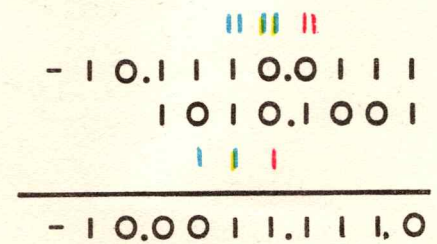
$$a - (b - c) = (a - b) + c$$

6. $100 - 1 = 11$
$10 - 100 = -10$

7. ¡Explica!







6 — DEFINICIÓN DE MULTIPLICACIÓN DE ENTEROS RACIONALES

Si cada una de las letras a, b designa un **natural**,

$$a \cdot b = \underbrace{b + \ldots\ldots + b}_{a \text{ términos}} = \underbrace{a + \ldots\ldots + a}_{b \text{ términos}}$$

Vamos a definir también

$$a \cdot (-b) = \underbrace{-b - \ldots\ldots - b}_{a \text{ términos}} = -\underbrace{(b + \ldots\ldots + b)}_{a \text{ términos}} = -(a \cdot b)$$

$$(-a) \cdot b = \underbrace{-a - \ldots\ldots - a}_{b \text{ términos}} = -\underbrace{(a + \ldots\ldots + a)}_{b \text{ términos}} = -(b \cdot a)$$

Luego,

$$(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = -(b \cdot a) = (-b) \cdot a = b \cdot (-a)$$

Si a designa un natural,

multiplicar un natural por $-a$
es multiplicarlo por a y cambiar el signo del producto.

EJERCICIOS

1. $(-7).6 = 7.(-6) = -(7.6) = -(6.7) = (-6).7 = 6.(-7) = -42$
2. $(-8).9 = -72$
3. $13.(-13) = -169$
4. $10.(-50) =$
5. $(-15).14 =$
6. $0.(-7) = 0$
7. $(-8).0 =$

Definimos el producto de dos enteros negativos **generalizando** la regla precedente:

Si a *designa un entero natural,*
multiplicar un entero natural por $-a$
es multiplicarlo por a **y cambiar el signo del producto.**

EJERCICIOS

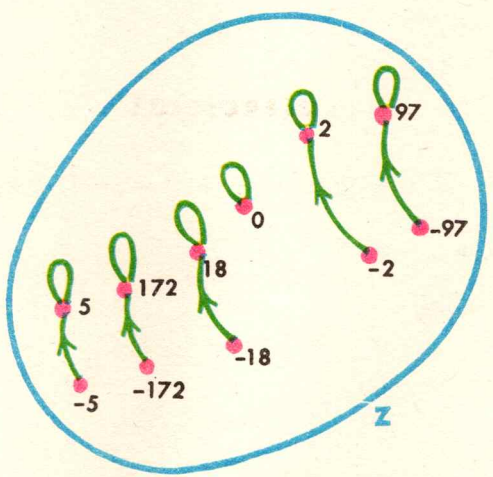
1. $(-7) \cdot (-8) = -(7 \cdot (-8)) = 7 \cdot 8$
2. $(-12) \cdot (-13) = 12 \cdot 13 = 13 \cdot 12 = (-13) \cdot (-12)$
3. $(-9) \cdot (-7) = 9 \cdot 7 = 7 \cdot 9 = (-7) \cdot (-9)$

Observa que **el producto de dos enteros racionales es positivo ssi los factores son del mismo signo. Este producto es negativo ssi los factores no tienen el mismo signo.**

DEFINICIÓN 2 — *Se llama* **valor absoluto** *de un entero racional al natural que se obtiene suprimiendo su signo. El valor absoluto de* x *será indicado* $|x|$.

Así,

$|3| = 3$, $|-7| = 7$, $|0| = 0$, $|2787| = 2787$
$|-123.456.789.012| = 123.456.789.012.$



LA TRANSFORMACIÓN DE $\mathbf{Z} : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} : x \to |x|$
VALOR ABSOLUTO

GRÁFICO 150

DEFINICIÓN 3 — **El producto de dos enteros racionales es el producto de sus valores absolutos, con**

signo + si los factores son del mismo signo;
signo — si los factores no tienen el mismo signo.

De esta definición resulta inmediatamente que si a, b designan enteros racionales,

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

Luego,

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| = |b| \cdot |a| = |b \cdot a|$$

Un entero racional está totalmente determinado por su valor absoluto y su signo.
Por otra parte,

$$|a \cdot b| = |b \cdot a|$$

y signo de $a \cdot b$ = signo de $b \cdot a$

luego, $a \cdot b = b \cdot a$

y la multiplicación de los enteros racionales es **conmutativa.**

EJERCICIOS

1 Para todo entero racional a:

$$1 \,.\, a = a = a \,.\, 1$$
$$0 \,.\, a = 0 = a \,.\, 0$$

2. Justifica esta sucesión de igualdades.
$|(a.b).c| = |a.b|.|c| = (|a|.|b|).|c| = |a|.(|b|.|c|) = |a|.|b.c| = |a.(b.c)|$
en las cuales cada una de las letras a, b, c designa un entero racional.

3. En la tabla siguiente te dan el signo de cada uno de los enteros racionales a, b, c.
Te piden que indiques el signo de los diferentes productos.

a	b	c		ab	bc	$(ab)c$	$a(bc)$
+	+	+	⇒				
—	+	+	⇒				
+	—	+	⇒	—	—	—	—
+	+	—	⇒				
+	—	—	⇒				
—	+	—	⇒				
—	—	+	⇒				
—	—	—	⇒				

Hemos considerado todos los casos posibles para a, b, c.
¿No hemos probado que si cada una de las letras a, b, c designa un entero racional, $(a \,.\, b) \,.\, c$ y $a \,.\, (b \,.\, c)$ tienen el mismo signo?

PROPOSICIÓN — *La multiplicación de los enteros racionales es asociativa y conmutativa. Admite el neutro 1 y el absorbente 0.*
Esta proposición está justificada por los ejercicios precedentes.

EJERCICIOS

1. Calcula

$2 \,.\, (-3) \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, (-6) =$
$5 \,.\, (-4) \,.\, (-3) \,.\, (-2) =$
$1285 \,.\, (-517) \,.\, 0 \,.\, (-1.111.111) =$

$(-917) \,.\, (-2) \,.\, (-1) =$
$(-1) \,.\, (-1) =$
$(-2) \,.\, (-2) \,.\, (-2) =$

2. Calcula las cinco primeras potencias de $2, 3, 1, 0, -1, -2, -3$.

3. **El cuadrado de todo entero racional es positivo.**
El cubo de todo entero racional negativo es negativo.
Justifica estas proposiciones y generalízalas.

4. Justifica y completa

$(-x)^2 = x^2$
$(-x)^3 = -x^3$
$(-x)^{17} = -x^{17}$

$(-x)^{32} = x^{32}$
$(-x)^{1.208.407} =$
$(-x)^{2.000.000.002} =$

5. Si cada una de las letras a, b, c designa un entero racional,

$$(-a)\,b = -(ab) = a\,(-b)$$
$$(-a)\,(-b) = a\,b$$
$$a\,(-b)\,c = (-a)\,b\,c = (-a)\,(-b)\,(-c)$$

6. Si $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \to |x|$, entonces $g^2 = g \circ g = g$.

7 — EL ANILLO Z, + , •

Sabemos que

en ω, la multiplicación es distributiva respecto de la adición.

Vamos a mostrar que

en Z, la multiplicación es distributiva respecto de la adición.

Dicho de otro modo:

$$\text{Para todo } x, y, z \in Z : x(y+z) = xy + xz$$

DEMOSTRACIÓN: Si $x = o$ la proposición es evidente.

Supongamos, pues, $x \neq o$.

Si x es positivo designémoslo a $\quad x = a$

Si x es negativo designémoslo $-a$ $\quad x = -a$

Debemos, pues, probar que para todo natural a *se tiene*

$$a(y+z) = ay + az \quad y \quad (-a)(y+z) = (-a) \cdot y + (-a) \cdot z$$

Demostremos para empezar la primera fórmula:

$$a(y+z) = \underbrace{(y+z) + (y+z) + \ldots + (y+z)}_{a \text{ términos}}$$

$$= \underbrace{(y + y + \ldots + y)}_{a \text{ términos}} + \underbrace{(z + \ldots + z)}_{a \text{ términos}}$$

$$= ay + az.$$

Demostremos la segunda fórmula:

$$\begin{aligned}(-a)(y+z) &= -(a(y+z)) \\ &= -(ay + az) \\ &= -(ay) - (az) \\ &= (-a)y + (-a)z\end{aligned}$$

(primera fórmula)

l.q.q.d.

Recapitulemos las propiedades de Z, +, •, es decir, del conjunto Z de los enteros racionales con las dos operaciones, adición y multiplicación.

1. Z, + es un grupo conmutativo.

2. La multiplicación definida en Z es asociativa, conmutativa y distributiva respecto de la adición.

Se expresa el conjunto de las propiedades precedentes diciendo que

Z, +, • es un anillo conmutativo.

En esta expresión la palabra conmutativa se aplica a la multiplicación.

Para todo entero racional z, se tiene

$$1 \cdot z = z.$$

Esto se expresa diciendo que el número 1 es *neutro para la multiplicación* y que es la unidad del anillo.

EJERCICIOS

1. Justifica y completa. (Las letras designan enteros racionales).

$2 \cdot (x + 3) = 2x + 6$
$2 \cdot (x - 3) = 2x - 6$
$2 \cdot (3 - x) = 6 - 2x$
$(-2) \cdot (x - 3) = -2x + 6$
$(-2) \cdot (3 + x) = -6 - 2x$
$3 \cdot (1 - bc) =$
$(-3) \cdot (bc - 2) = -3bc + 6$
$12 \cdot (x + 3) + 5 \cdot (x - 7) = 17x + 1$
$(-6) \cdot (x - 6) + 6 \cdot (x + 6) =$
$3(x + y + z) = 3x + 3y + 3z$
$(-3) \cdot (x - y + z) =$
$6 \cdot (2x - 3y - 3z) = 12x - 18y - 18z$
$a \cdot (x + y + z) = ax + ay + az$
$a \cdot (x - y - z) =$
$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$
$(x - 1)(x + 7) =$
$(x - 2)(x - 3) =$

$(x + 5)(5 - x) = 25 - x^2$
$(a + b)(x + y) = ax + bx + ay + by$
$(a - b)(x - y) = ax - bx - ay + by$
$(2x + 1)(3x + 5) = 6x^2 + 13x + 5$
$(2x - 3)(5 - 4x) =$
$(2x - 1)(7 + 5x) = 10x^2 + 9x - 7$
$(5 - 8x)(5 + 8x) =$

2. Prueba que para todo conjunto E,

$\mathcal{P}E, \Delta, \cap$ es un anillo conmutativo.

La diferencia simétrica Δ juega aquí el papel de la adición, y la intersección $\cap$, el de la multiplicación. El papel del cero corresponde a ϕ y el de la unidad a E.

3. Justifica y completa.
(Las letras designan enteros racionales.)

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$
$(x - 1)^2 =$
$(a - b)^2 =$
$(2x - 5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$
$(7 + 4y)^2 =$

4. Justifica y completa.
(Las letras designan conjuntos.)

$(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$
$(A \cap B) \cup (C \cap D) =$
$(A \cup B) \cap (A \cup B) =$
$(A \cup B) \cup (A \cup B) =$
$(A \cup B) \setminus (A \cup B) =$

5. Justifica y completa.
(Las letras designan enteros racionales.)

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
$(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$
$(7 - y)(7 + y) =$
$(bc + 1)(1 - bc) =$

6. Sean $a, b, c \in Z$.
Si $a = bc$ se dirá que b y c dividen a a, que se escribe

$$b \mid a \quad , \quad c \mid a$$

Justifica las fórmulas

$$a \mid a, \quad a \mid -a, \quad -a \mid a \qquad \text{para todo } a \in Z.$$

¿No acabas de probar que la relación $\mid$ es reflexiva y no antisimétrica? La relación $\mid$ definida en Z no es, por tanto, un orden.
Muestra que esta relación es, sin embargo, transitiva.
Justifica por último la fórmula

$$1 \mid a \mid 0 \qquad \text{para todo } a \in Z.$$

Ilustra el resultado precedente con ejemplos numéricos.

7. Si $x, y, z \in Z$: $x \mid y \Rightarrow x \mid yz$.

8. Si $d, x, y \in Z$: $d \mid x$ y $d \mid y \Rightarrow d \mid (x + y)$.

9. Si $d, a, b, x, y \in Z$: $d \mid x$ y $d \mid y \Rightarrow d \mid (ax + by)$.

10. ¿Quieres comentar este gráfico?

UN FRAGMENTO DEL GRÁFICO DE LA PERMUTACIÓN

$Z \to Z : z \to z + 6$

GRÁFICO 151

11. Justifica y completa. (Las letras designan enteros racionales.)

$(2a + 3b)(a - 3b) = 2a^2 - 3ab - 9b^2$
$(2a - 3b)(a - 3b) =$
$(x + y + 1)(x + 5) = x^2 + xy + 6x + 5y + 5$
$(2x - y - 6)(3x - 5) =$
$(x - y - 1)(1 - x) =$
$(x + y + 1)(x + y + 1) = x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2xy + 1$
$= (x + y + 1)^2$
$(x - y + 1)^2 =$
$(x - y - 1)^2 = x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y + 1$

12. Te informan que una de las letras a, b representa a 1 y la otra a -1, pero no te dicen cuál es la que vale 1.

Para todo entero racional c se tendrá, sin embargo, $abc = -c$.

13. Es ya tarde. Si sigo adelante por este camino desierto no tardaré en encontrar una estación de servicio, frente a la cual el camino se bifurca. No me acuerdo si allí debo tomar a la derecha o a la izquierda y en la ruta no hay indicación ninguna; la estación de servicio es el último lugar en el que voy a poder informarme.

La estación está atendida por dos hermanos mellizos que trabajan alternativamente. Uno dice siempre la verdad y el otro miente en todas sus respuestas.

Aunque no sepa absolutamente distinguir estos hermanos uno del otro, me es posible, haciendo una sola pregunta al mellizo de turno, recoger la información que me permita tomar la ruta correcta.

¿Qué pregunta debo hacer?

14 Explica el vínculo entre los ejercicios 12 y 13.

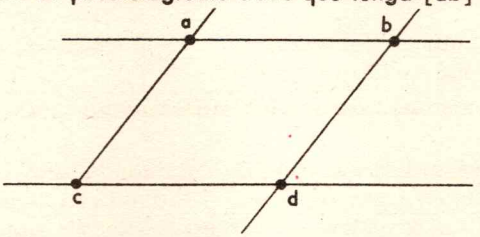
15. Quieres argumentar para justificar las fórmulas siguientes:
es verdadero que es falso que...
= es falso que es verdadero que...
= es falso que...
¿Quieres buscar otras fórmulas de este tipo?

21

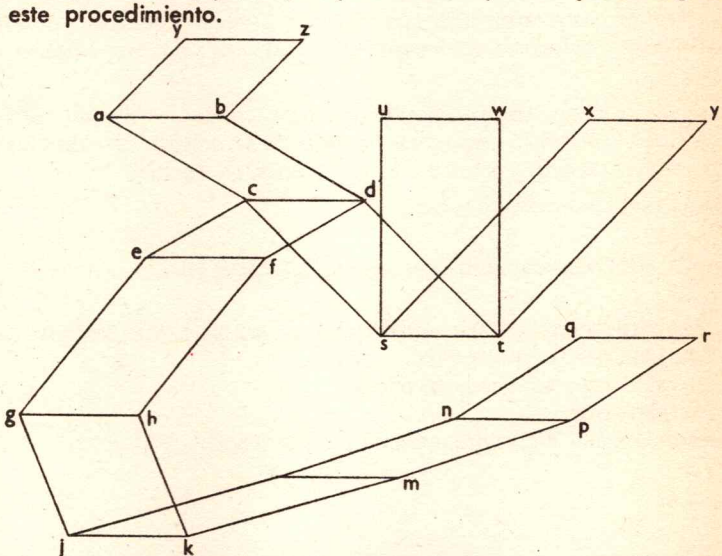
Equipolencia

1 — PARES ORDENADOS EQUIPOLENTES

He aquí dos puntos
¿Quieres construir un paralelogramo *abdc* que tenga [*ab*] como lado?



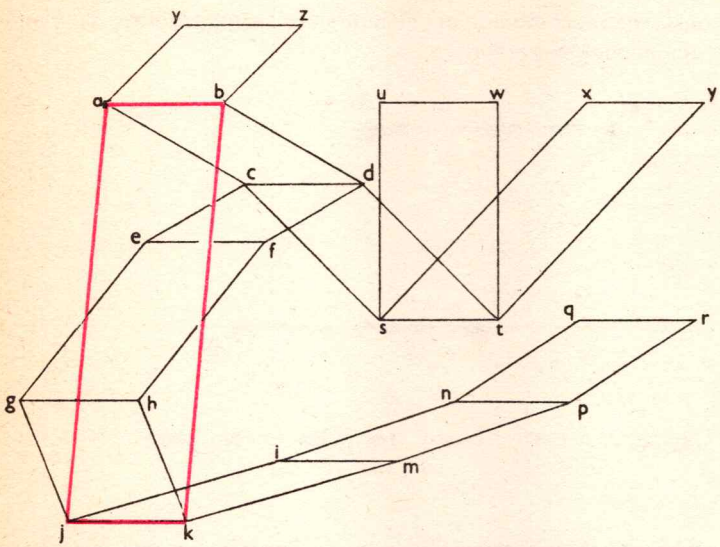
A partir del par ordenado (*a*, *b*) has construido un par ordenado (*c*, *d*).
Diremos que los pares (*a*, *b*) y (*c*, *d*) se pueden ***unir por un paralelogramo***.
Repitamos este procedimiento.



Los pares ordenados así construidos se llaman **equipolentes**, y esto lo escribiremos

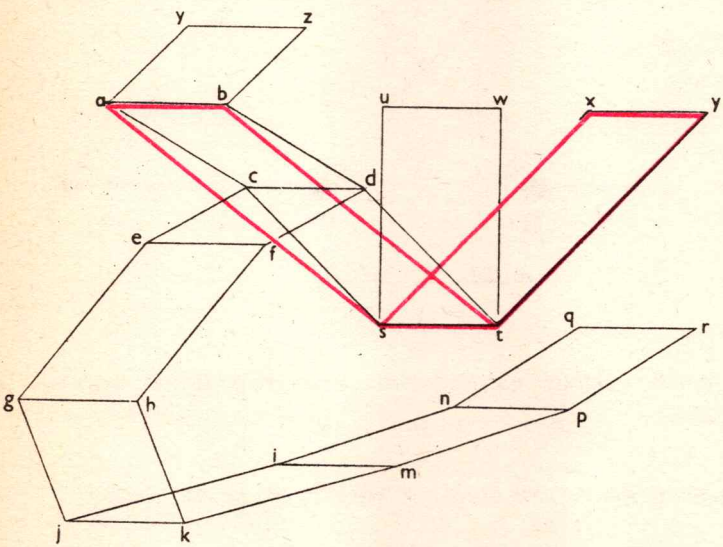
$(a, b) \uparrow (c, d) \uparrow (e, f) \uparrow (g, h) \uparrow (j, k) \uparrow (l, m) \uparrow (n, p) \uparrow (q, r) \uparrow (s, t) \uparrow (u, w)$
$(a, b) \uparrow (e, f) \uparrow (x, y)$
$(a, b) \uparrow (g, h)$ etc.

Examina los pares (a, b) y (j, k).
¡Pueden unirse directamente por un paralelogramo!
Lo vemos *experimentalmente*.



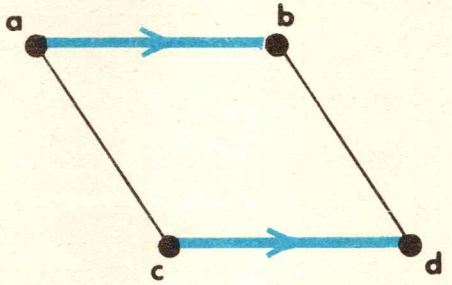
$(a, b) \uparrow (j, k)$
$ab \parallel jk$
$a\ j \parallel b\ k$
$(a, j) \uparrow (b, k)$

— Explica la leyenda de este dibujo.
— Examina ahora el caso de los *pares alineados* (a, b) y (x, y).
— Como (a, b) y (s, t) se pueden unir por un paralelogramo, (a, b) y (x, y) podrán quedar unidos por dos paralelogramos.



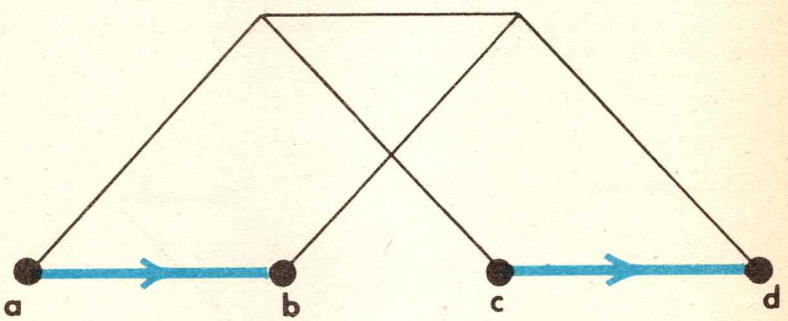
DEFINICIÓN 1 —

1. *Dos pares ordenados de puntos no alineados son* ***equipolentes*** *ssi pueden ser unidos por un paralelogramo.*



$$(a, b) \uparrow (c, d) \iff (ac \parallel bd \text{ et } ab \parallel cd)$$

2. *Dos pares ordenados (no idénticos) de puntos alineados son equipolentes ssi pueden ser unidos por dos paralelogramos.*



$$(a, b) \uparrow (c, d)$$

3. *Vamos a admitir también que todos los pares idénticos son equipolentes,*

$$(a, a) \uparrow (b, b) \uparrow (c, c) \ldots$$

y que

todo par ordenado equipolente a un par idéntico es un par idéntico.

2 — PROPIEDADES DE LA EQUIPOLENCIA

PROPOSICIÓN 1 — *La equipolencia es reflexiva.*

Si $a \in \Pi$, se tiene $(a, a) \uparrow (a, a)$ Definición 1 - 3

Si $a, b \in \Pi$, el par (a, b) queda unido a sí mismo por "dos" paralelogramos.

Luego, $(a, b) \uparrow (a, b)$ Definición 1 - 2

l.q.q.d.

PROPOSICIÓN 2 — *La equipolencia es simétrica.*

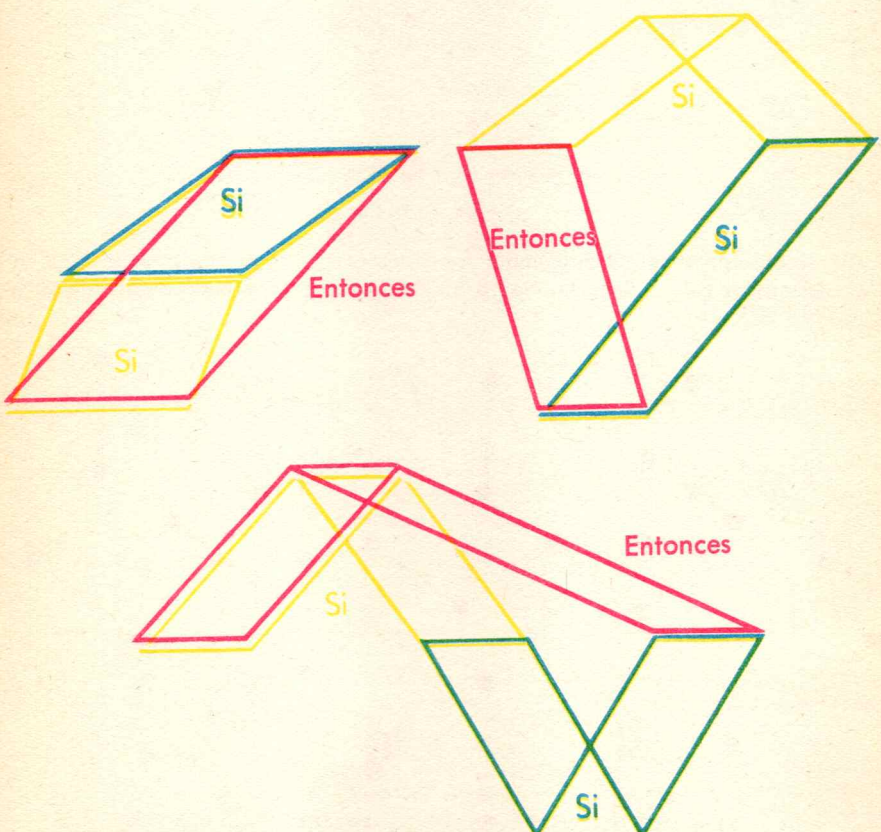
1. Para todo $a, b \in \Pi$: $(a, a) \uparrow (b, b) \Rightarrow (b, b) \uparrow (a, a)$ (Definición 1 - 3).
2. Si $(a, b) \uparrow (c, d)$, el par (c, d) puede ser unido a (a, b) por uno o dos paralelogramos.

Al unirnos, (a, b) queda unido a (c, d) por uno o dos paralelogramos.

l.q.q.d.

Hemos admitido "experimentalmente" la **transitividad** de la equipolencia.

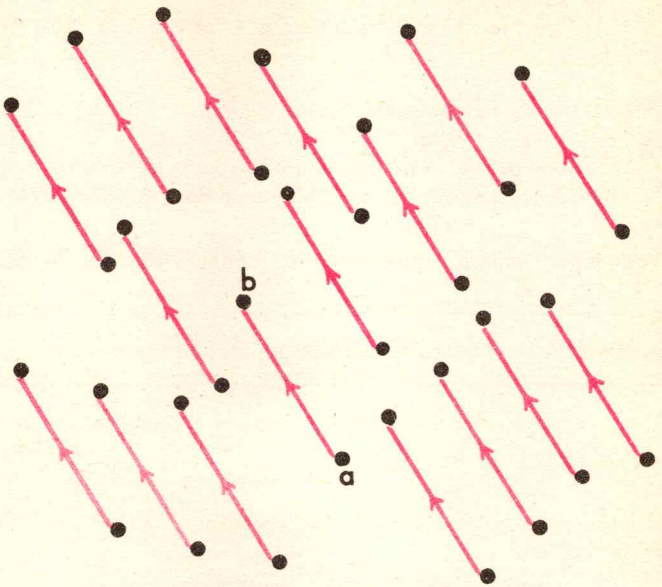
AXIOMA Π 10 — ***La equipolencia es transitiva.***



TRANSITIVIDAD DE LA EQUIPOLENCIA

TEOREMA 1 — **La equipolencia es una equivalencia.**

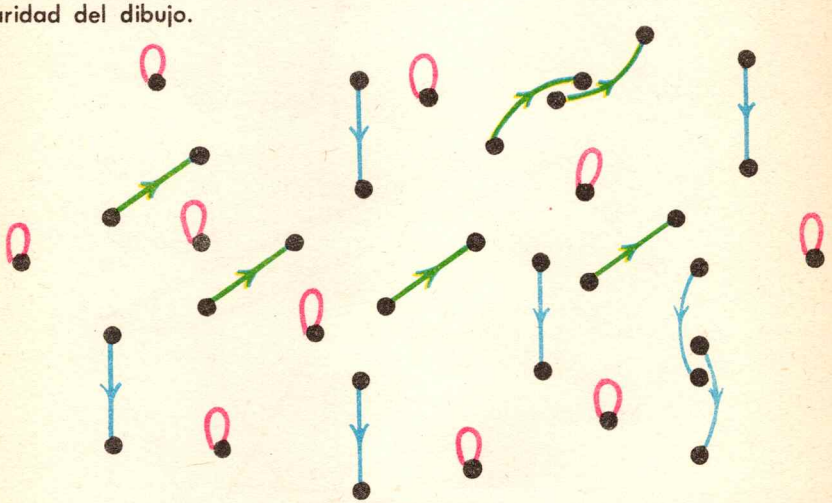
Consecuencia inmediata de las *proposiciones* 1 y 2 y del axioma Π 10.



ALGUNOS PARES ORDENADOS EQUIPOLENTES

GRÁFICO 152

Representaremos preferentemente los pares ordenados equipolentes por flechas rectas del mismo color. Recurriremos a las flechas curvas cuando éstas contribuyan a la claridad del dibujo.



TRES CONJUNTOS DE PARES ORDENADOS EQUIPOLENTES

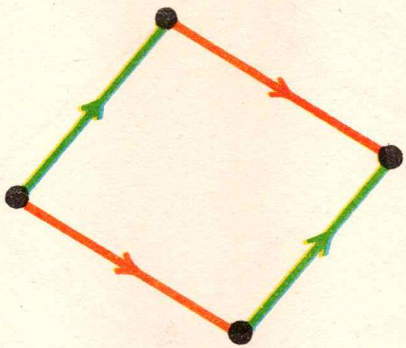
GRÁFICO 153

PROPOSICIÓN 3 — *Si los puntos* **a, b, c, d** *no están alineados,*

$$(a, b) \uparrow (c, d) \iff (a, c) \uparrow (b, d)$$

Si

Entonces



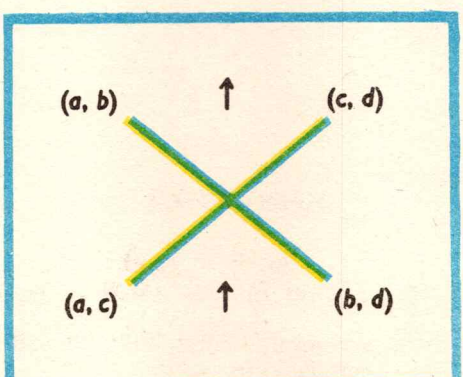
Si

Entonces

Veremos más adelante que la proposición 3 sigue siendo válida cuando los puntos *a, b, c, d* están alineados.

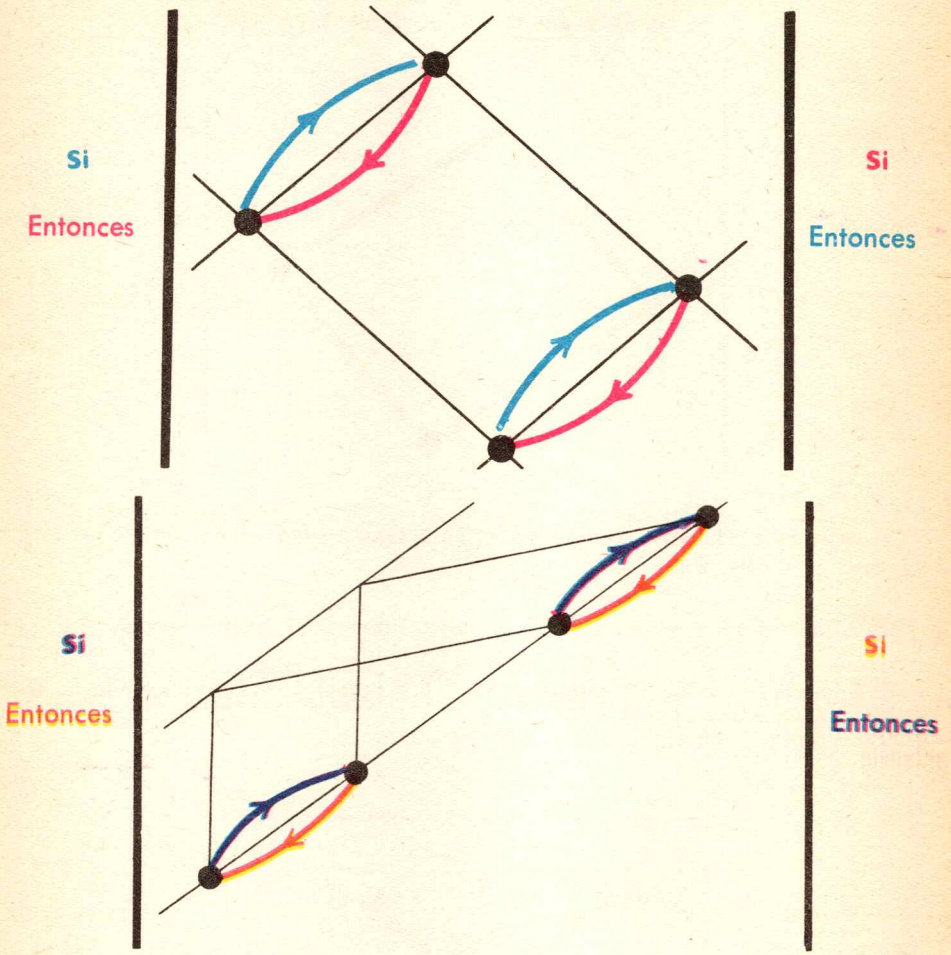
Una fórmula como $(a, b) \uparrow (c, d)$ se llama brevemente **equipolencia.**

Diremos que se pasa de $\boxed{(a, b) \uparrow (c, d)}$ a $\boxed{(a, c) \uparrow (b, d)}$ cruzando la equipolencia $\boxed{(a, b) \uparrow (c, d)}$



CRUZAMIENTO DE EQUIPOLENCIAS

PROPOSICIÓN 4 — $(a, b) \uparrow (c, d) \iff (b, a) \uparrow (d, c)$



EJERCICIOS

1. **Si** $(a, b) \uparrow (c, d)$
   entonces $(x, y) \uparrow (a, b) \iff (x, y) \uparrow (c, d)$.

2. Si dos pares ordenados son equipolentes, todo par ordenado equipolente a uno de ellos es equipolente al otro.

3. ¿Quieres cruzar las equipolencias

   $(a, b) \uparrow (c, d)$ $\quad$ $(x, y) \uparrow (y, z)$
   $(a, c) \uparrow (b, d)$ $\quad$ $(u, v) \uparrow (w, u)$?

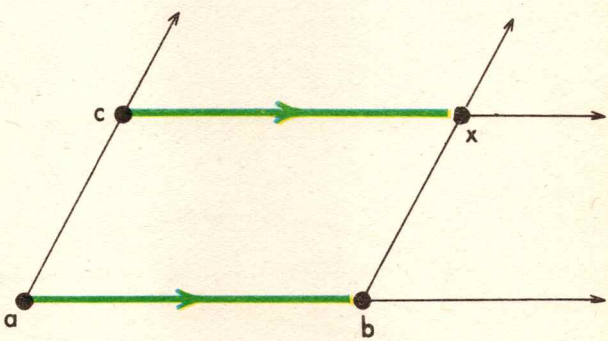
3 — CONSTRUCCIÓN DE PARES ORDENADOS EQUIPOLENTES

Tienes aquí tres puntos:

Trazando nada más que paralelas, ¿quieres construir un punto x tal que

$$(c, x) \uparrow (a, b).$$

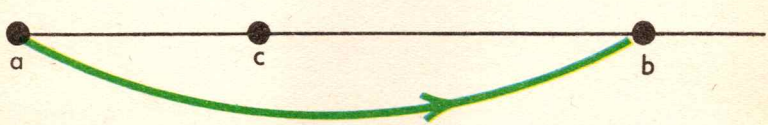
Este punto x debe ser la intersección de la paralela a *ab* que contiene a *c* y de la paralela a *ac* que contiene a *b*.



Existe, pues, un punto, y solo uno, *x*, tal que

$$(a, b) \uparrow (c, x)$$

— Te propongo el mismo problema en una situación un poco desconcertante.

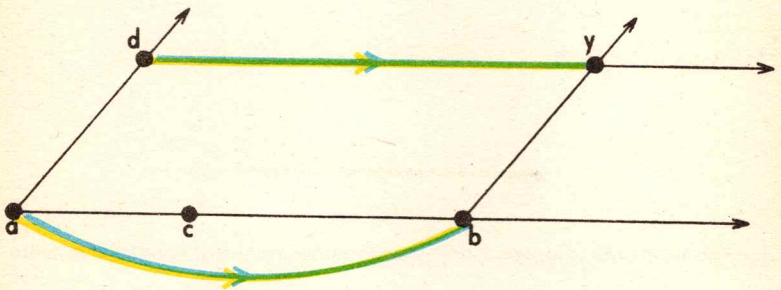


— Sabes que si dos pares ordenados son equipolentes, todo par ordenado equipolente a uno de ellos es equipolente al otro.

Elige un punto $d \notin ab$.

Esta vez sabes que existe un punto, y solo uno, y, tal que $(d, y) \uparrow (a, b)$.

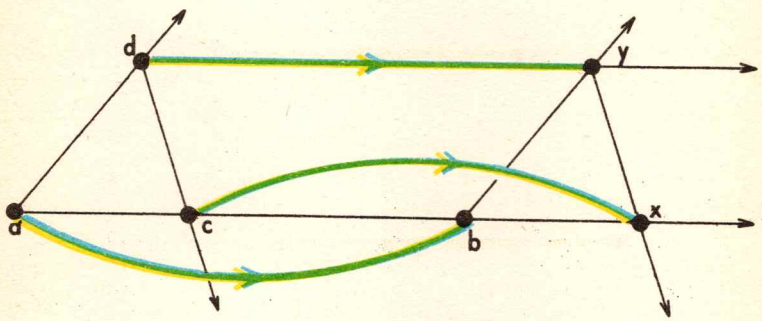
Construye ese punto y.



El problema propuesto se reduce, pues, a hallar x tal que

$$(c, x) \uparrow (d, y)$$

¡Ponte a trabajar!



Esta vez también vemos que existe un punto, y solo uno, x, tal que

$$(c, x) \uparrow (a, b).$$

Modifica la construcción anterior para el caso $c = a$.

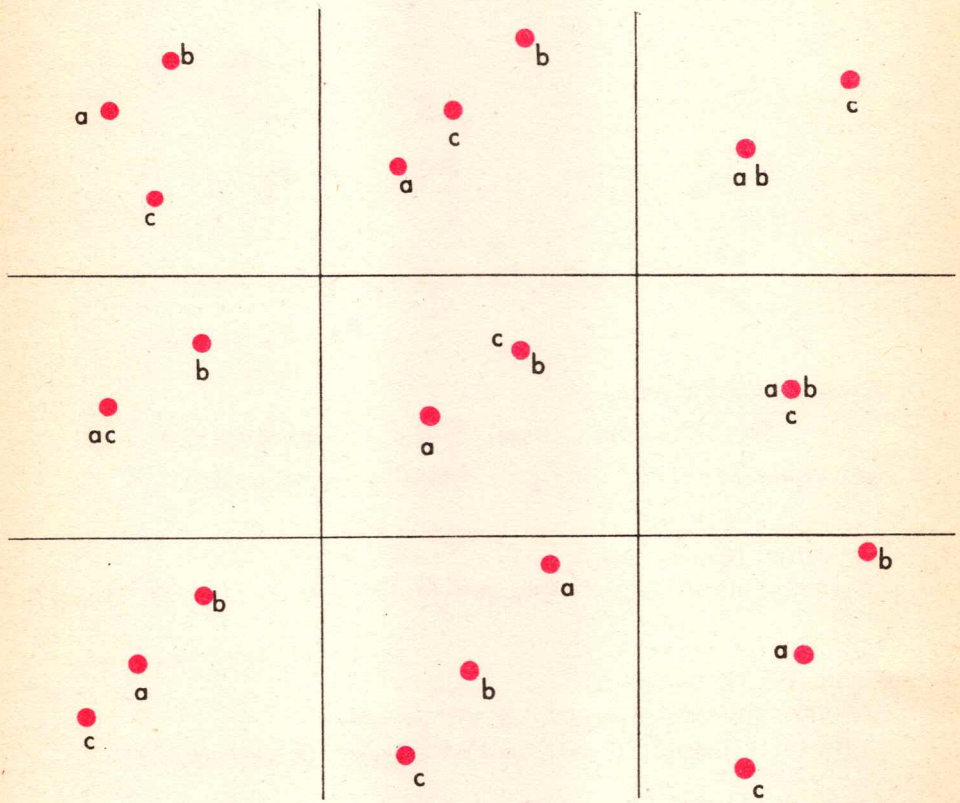
Vas a obtener entonces $x = b$.

EJERCICIOS

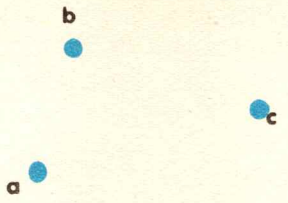
1. *Si cada una de las letras* ***a***, ***b***, ***c*** *designa un punto, existe un punto, y solo uno,* ***y*** *tal que* $(y, c) \uparrow (a, b)$.

2. $(a, b) \uparrow (y, b) \Rightarrow \ldots$
Completa y justifica.

3. Construye puntos x, y tales que $(c, x) \uparrow (a, b) \uparrow (y, c)$ en las situaciones siguientes.



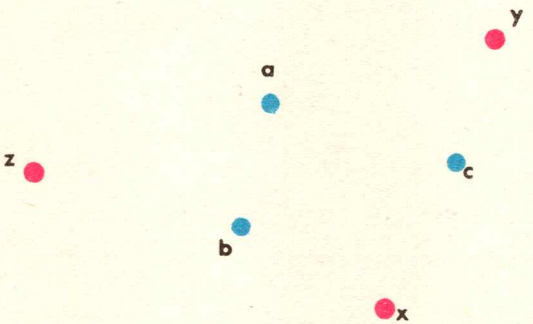
4. He aquí tres puntos $a, b, c \in \Pi$.



¿Quieres construir x, y, z tales que

$$(a, b) \uparrow (c, x) \quad , \quad (b, c) \uparrow (a, y) \quad , \quad (c, a) \uparrow (b, z).$$

Justifica las construcciones.



Demuestra las fórmulas

$$(y, c) \uparrow (a, b) \quad , \quad (z, a) \uparrow (b, c) \quad , \quad (x, b) \uparrow (c, a).$$

¿Las ternas (a, b, c) y (x, y, z) tienen el mismo sentido?

5. Sea $a, b \in \Pi$ y $a \neq b$.
¿Quieres construir x, y, z tales que $(a, b) \uparrow (b, x) \uparrow (x, y) \uparrow (y, z)$?

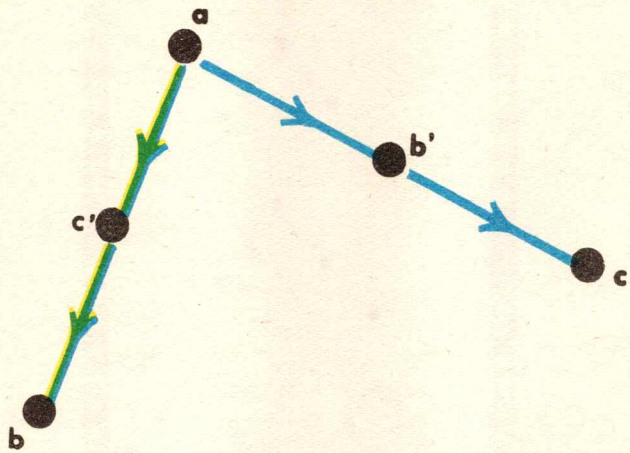
6. Sea $a, b \in \Pi$ y $a \neq b$.
¿Quieres construir x, y, z, u, v, w tales que
$(w, v) \uparrow (v, u) \uparrow (u, a) \uparrow (a, b) \uparrow (b, x) \uparrow (x, y) \uparrow (y, z)$?

7. Si cada una de las letras a, b, c designa un punto

$$(a, b) \uparrow (a, c) \iff b = c$$
$$(a, b) \uparrow (c, b) \iff a = c$$

4 — CENTRO - PUNTO MEDIO

Examina esta situación:

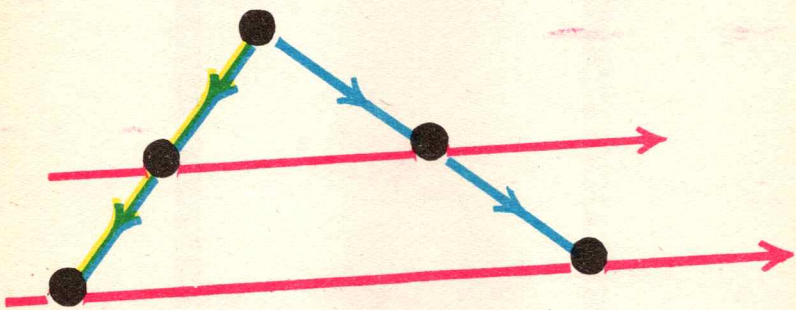


¿Qué equipolencias hemos destacado?

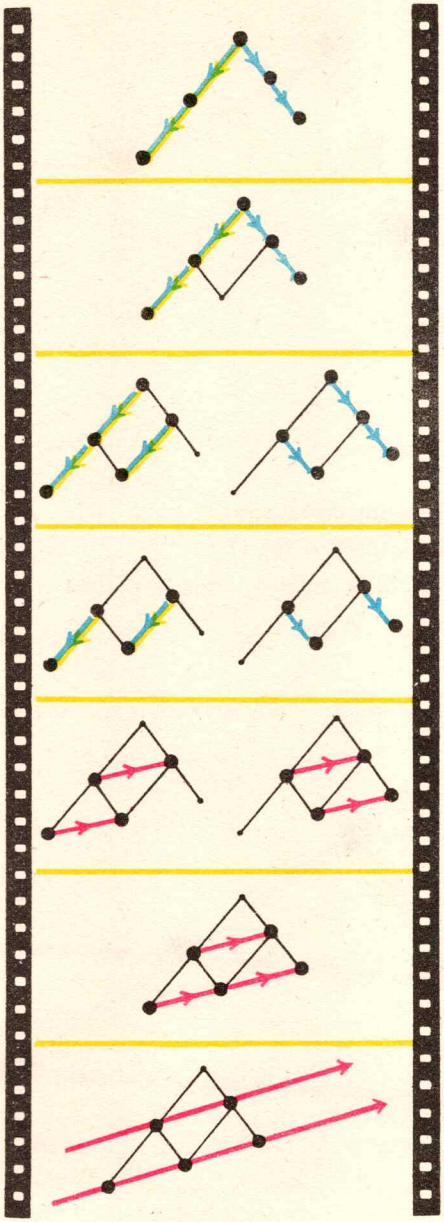
— $(a, c') \uparrow (c', b)$ y $(a, b') \uparrow (b', c)$.

— Vamos a probar que de lo anterior surge $b'c' \parallel bc$.

PROPOSICIÓN 5 — $(a, b') \uparrow (b', c)$ y $(a, c') \uparrow (c', b) \Rightarrow b'c' \parallel bc$

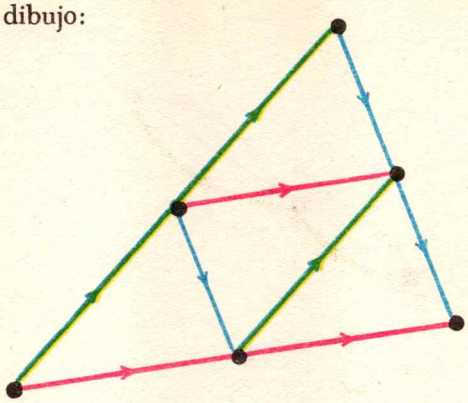


He aquí el filme de la demostración.
¡Explícala!

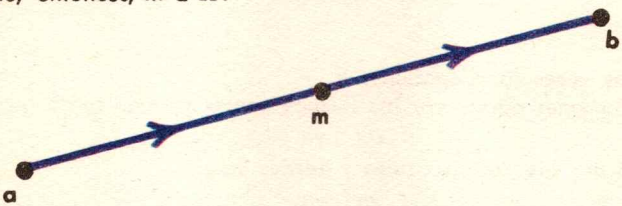


EJERCICIO

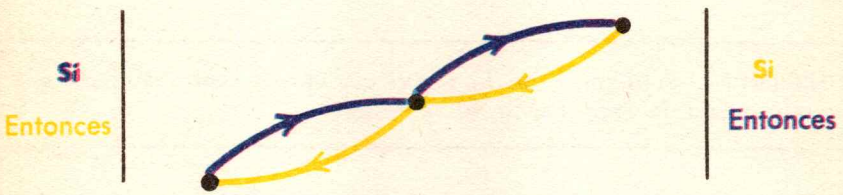
Comenta este dibujo:



Aislemos la situación $(a, m) \uparrow (m, b)$ que se da varias veces en el dibujo anterior. Se tiene, entonces, $m \in ab$.



Sabemos (ver proposición 4) que $(a, m) \uparrow (m, b) \iff (b, m) \uparrow (m, a)$



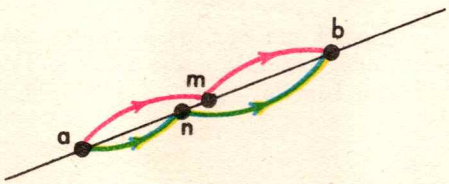
La proposición 5 nos va a permitir ver muy simplemente que existe un solo punto m tal que $(a, m) \uparrow (m, b)$.

PROPOSICIÓN 6 — $(a, m) \uparrow (m, b)$ y $(a, n) \uparrow (n, b) \Rightarrow m = n$

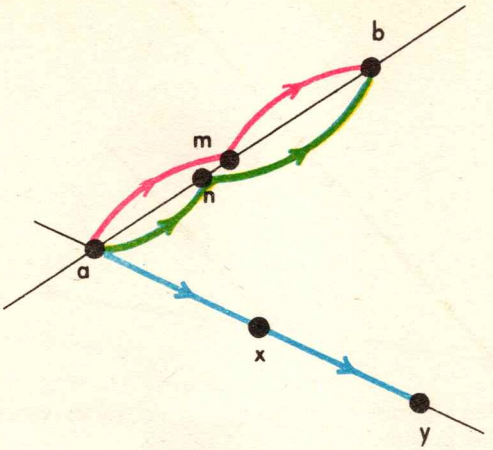
Nos dicen que $(a, m) \uparrow (m, b)$ y $(a, n) \uparrow (n, b)$.

Llevemos esta información a un dibujo.

(Sabemos que $m \in$ y et $n \in ab$)



Elige un punto $x \notin a\ b$.
Sabes construir y tal que $(a, x) \uparrow (x, y)$.



Aplicamos dos veces la proposición 5.
De las informaciones dadas por las flechas azules y rojas surge que

$$xm \parallel yb$$

De las dadas por las flechas azules y verdes surge

$$xn \parallel yb$$

Pero existe una sola paralela a yb que contiene el punto x.
Luego, $xm = xn$, y esto implica $m = n$.

DEFINICIÓN 2 — *Si* $(a, m) \uparrow (m, b)$, se dice que m *es el* ***centro*** *del par* $\{a, b\}$ o *el* ***punto medio*** *del segmento* $[a, b]$.

Esta definición permite dar un nuevo enunciado a la proposición 5.

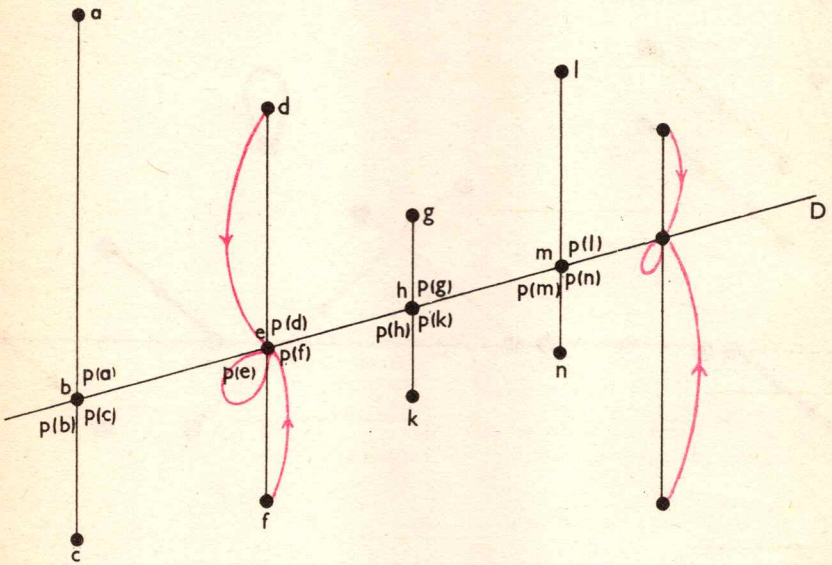
PROPOSICIÓN 5 — Toda recta que contiene los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado.

EJERCICIO

Para todo $x, y \in \Pi$ designemos por $c(x, y)$ el centro del par $\{x, y\}$.
Se ha definido de este modo una aplicación $c: \Pi \times \Pi \to \Pi$.
Se tiene $c(x, x) = x$. La función $c: \Pi \times \Pi \to \Pi$ es suryectiva y no inyectiva.

5 — PROYECCIONES PARALELAS DE PARES ORDENADOS EQUIPOLENTES

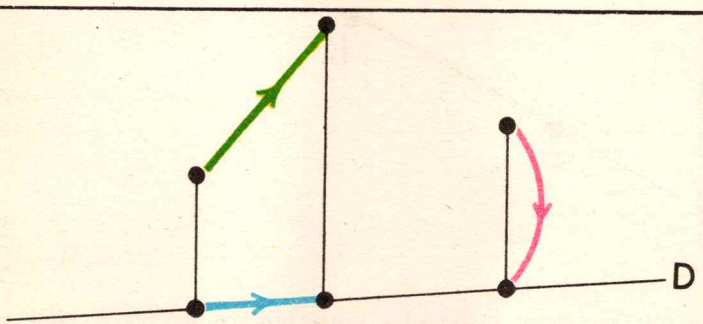
Sea *p* una proyección paralela del plano Π sobre la recta D.



P : PROYECCIÓN PARALELA: Π → D

Las rectas paralelas a *ab* son las **proyectantes** de la proyección.

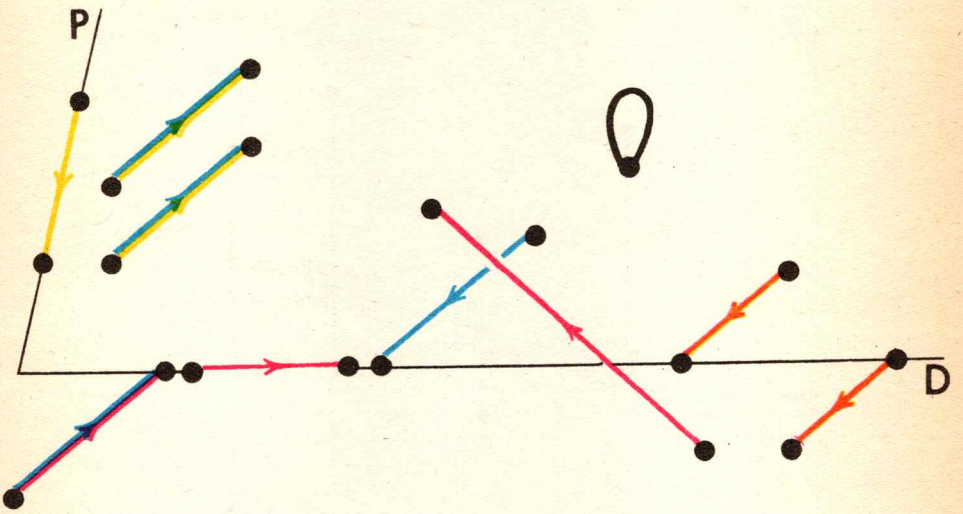
DEFINICIÓN 3 — *Para todo* ***a***, ***b*** ε Π, *el par ordenado* (***p(a)***, ***p(b)***) *se llama proyección de* (***a***, ***b***) *sobre D.*



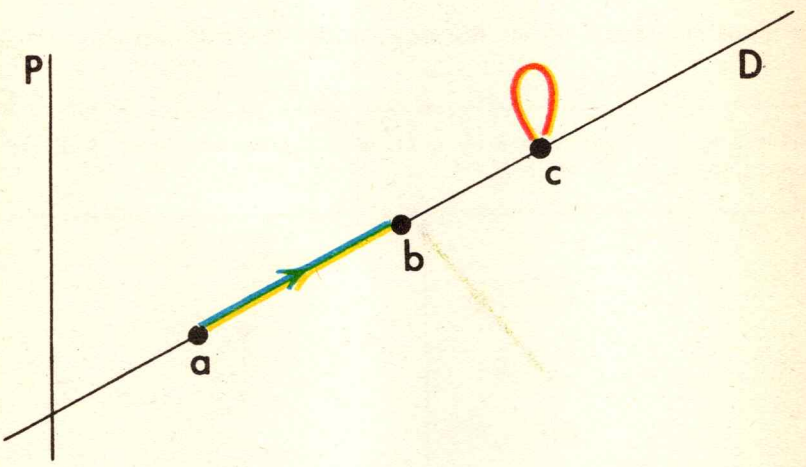
PAR ORDENADO Y SU PROYECCIÓN

EJERCICIOS

1. Proyecta los pares ordenados dibujados, paralelamente a P sobre la recta D.

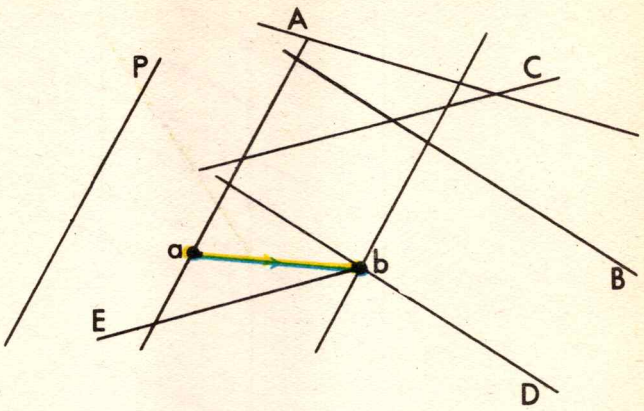


2. ¿Cuáles son los pares ordenados cuya imagen es (a, b) por la proyección $\Pi \rightarrow$ D, paralela a P?

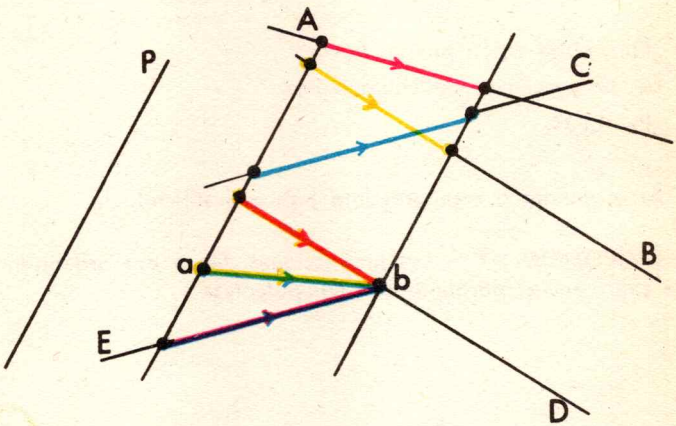


¿Cuáles son los pares ordenados cuya imagen es (c, c) por esta misma proyección?

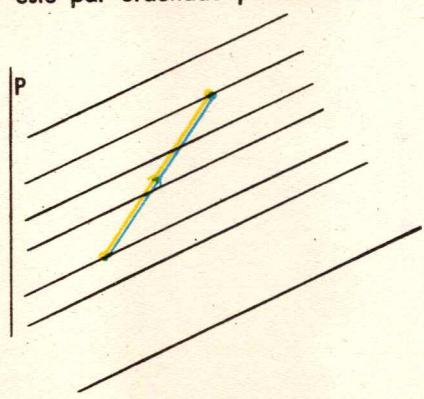
¿Quieres proyectar el par ordenado (*a*, *b*) paralelamente a P, sobre las rectas A, B, C, D, E?



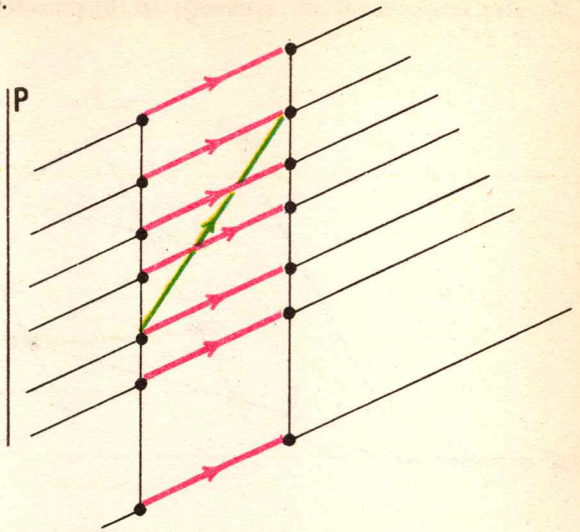
Aquí proyecciones.



¿Quieres proyectar este par ordenado paralelamente a P, sobre las rectas paralelas?



Aquí está proyectado.



¿Qué observación puedes hacer?

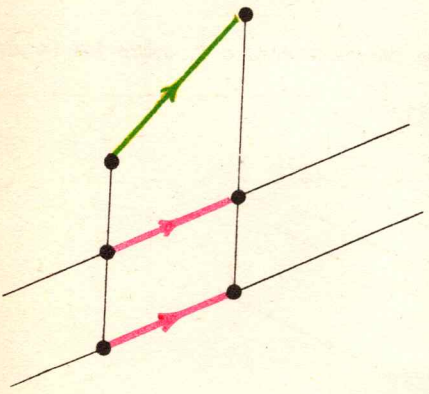
— Las proyecciones son equipolentes.

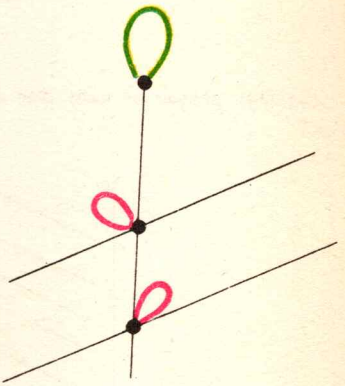
— ¿Por qué?

— . . .

— Al responder a esta pregunta habrás justificado la

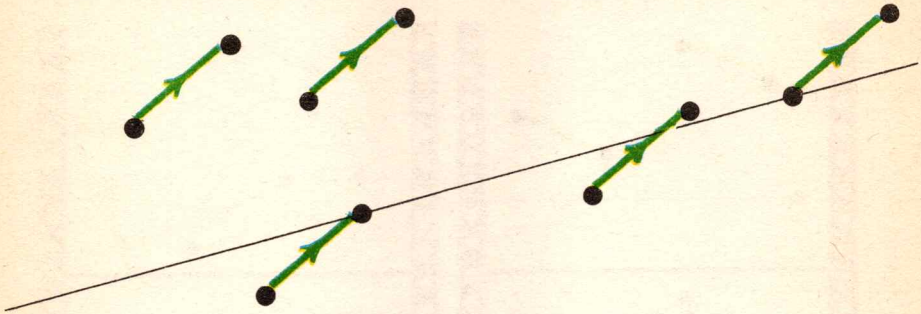
PROPOSICIÓN 7 — *Las proyecciones de un par ordenado paralelamente a una recta sobre rectas paralelas son equipolentes.*





Acabamos de proyectar un par ordenado paralelamente a P sobre rectas paralelas.

Proyectemos ahora pares ordenados equipolentes, paralelamente a P, sobre D.



¿Qué observas?

PROPOSICIÓN 8 — *Las proyecciones de pares ordenados equipolentes sobre una misma recta son equipolentes.*

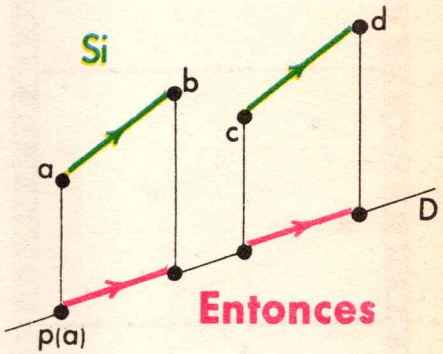
Sea una proyección paralela

$$p : \Pi \to D$$

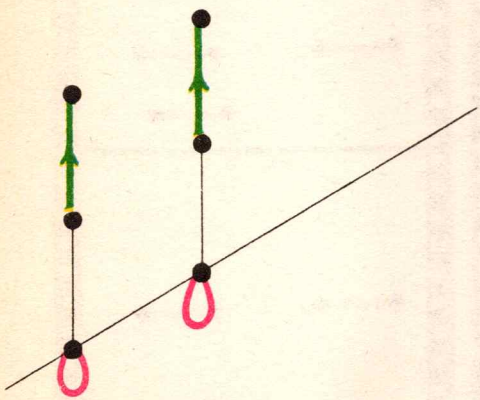
$(a, b) \uparrow (c, d)$

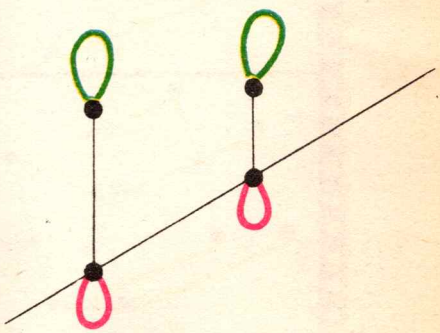
$\Downarrow$

$(p(a), p(b)) \uparrow (p(c), p(d))$

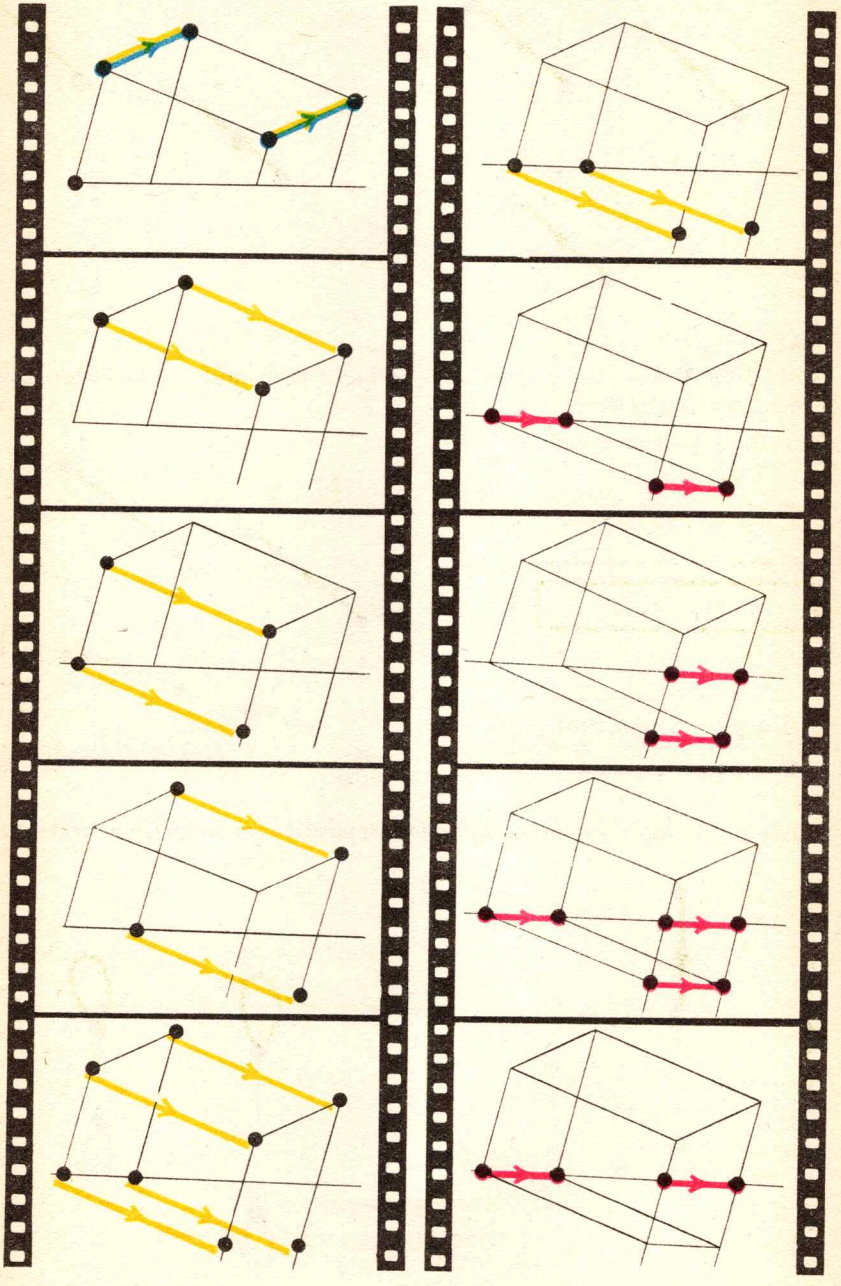


Casos particulares en los cuales esta proposición es totalmente evidente:





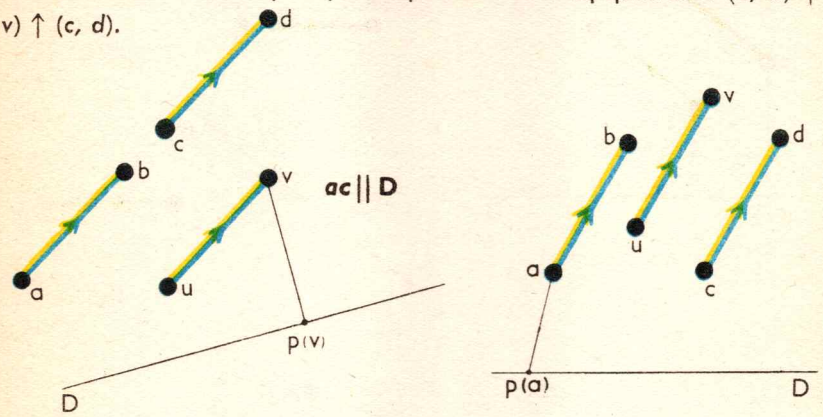
He aquí el filme de la demostración (para caso en que *a* y *b* no pertenecen a una misma *proyectante* de la proyección).



La demostración exhibida a lo largo del film es aplicable en toda situación tal que a, b, c, d no estén en línea recta y $ac \nparallel D$

Si a, b, c, d están en línea recta o si $ac \parallel D$,

nos servimos de un par ordenado auxiliar (u, v) equivalente a (a, b) y (c, d) y tal que la demostración anterior pueda ser aplicada a las equipolencias $(a, b) \uparrow (u, v)$ y $(u, v) \uparrow (c, d)$.



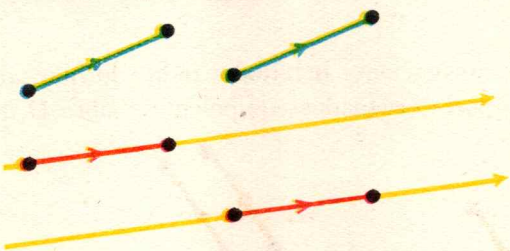
a, b, c, d COLINEARES

En virtud de la demostración filmada que presentamos más arriba,

$$(a, b) \uparrow (u, v) \Rightarrow (p(a), p(b)) \uparrow (p(u), p(v))$$
$$(u, v) \uparrow (c, d) \Rightarrow (p(u), p(v)) \uparrow (p(c), p(d))$$

Como consecuencia de la transitividad de $\uparrow$, se llega a la conclusión $(p(a), p(b)) \uparrow (p(c), p(d))$ c.q.f.d.

TEOREMA 2 — **Las proyecciones paralelas de pares ordenados equipolentes sobre rectas paralelas son equipolentes.**



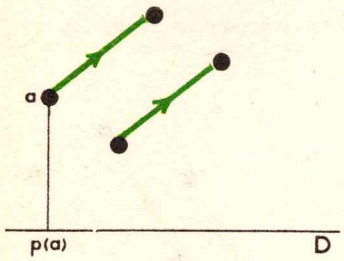
Si Si Entonces

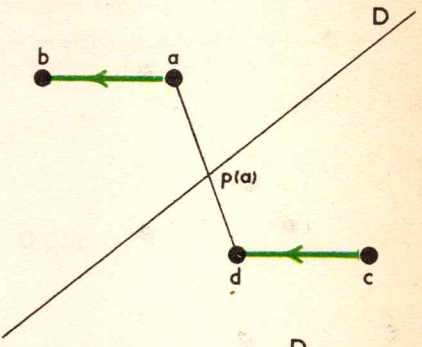
Este teorema resulta de las proposiciones 7 y 8.
¿Quieres detallar la demostración y dibujar el film?
Indica en cada etapa las proposiciones que aplicas.
Más brevemente:

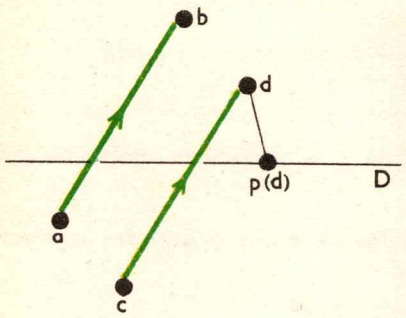
TEOREMA 2 — **Las proyecciones paralelas respetan la equipolencia.**

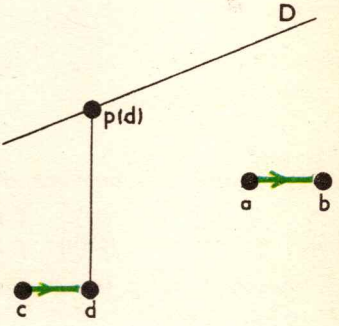
EJERCICIOS

1. Dibuja el filme de la demostración de la pág. 362 para las situaciones que presentamos aquí.

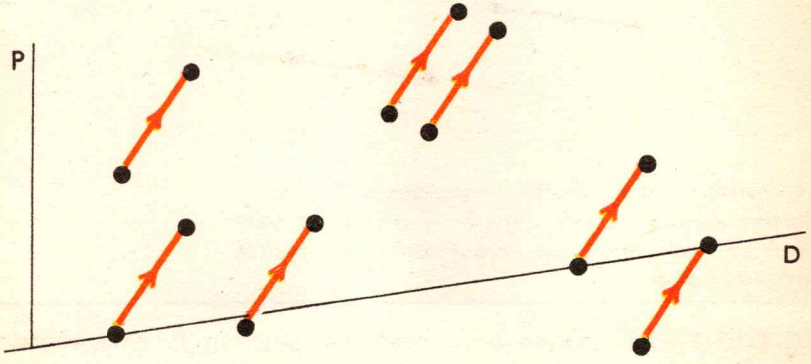






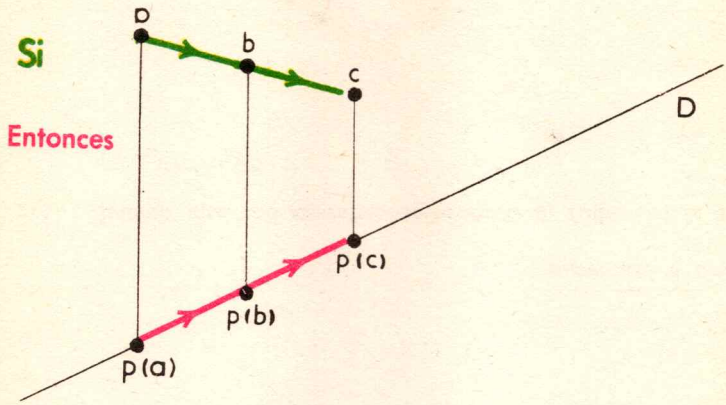


2. Según nuestras convenciones habituales indica lo que sabes de las proyecciones de estos pares ordenados equipolentes, sobre D, paralelamente a P.



6 — APLICACIONES

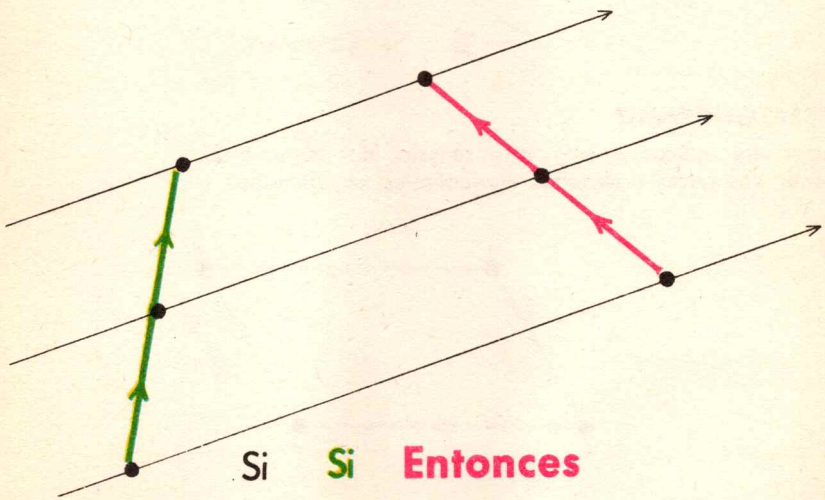
1. PROYECCIÓN PARALELA $p : \Pi \to D$.



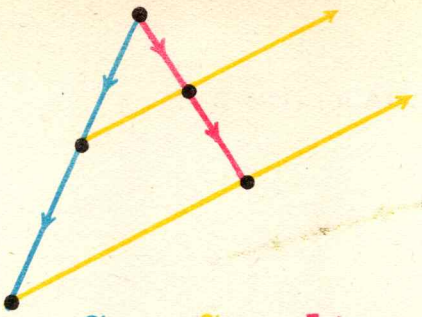
$$(a, b) \uparrow (b, c) \Rightarrow (p(a), p(b)) \uparrow (p(b), p(c))$$

Las proyecciones paralelas respetan el punto medio.

2. Enuncia y justifica.



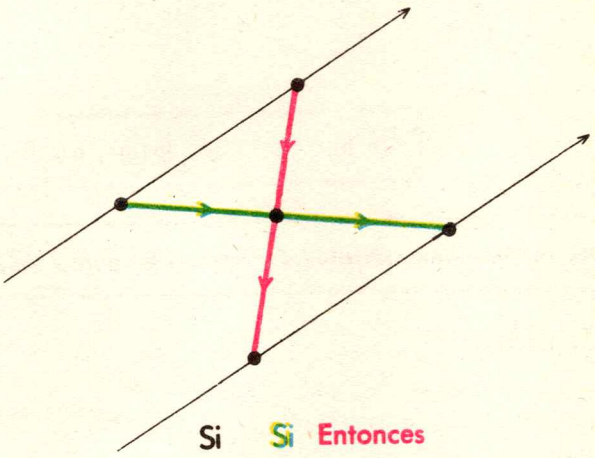
3.



Si Si Entonces

¡Enuncia y demuestra la proposición sugerida por este dibujo!

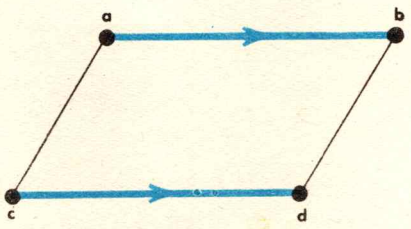
4. Enuncia y demuestra.



Si Si Entonces

5. **PARALELOGRAMO**

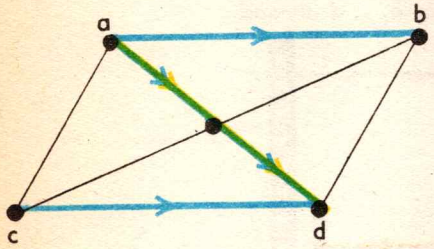
Veamos una aplicación más, muy sencilla, del teorema 2.
He aquí dos pares ordenados equipolentes no alineados.

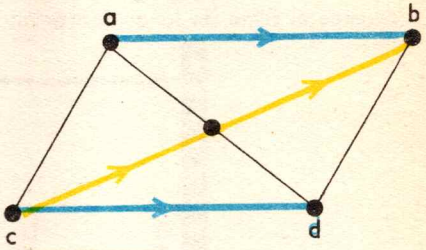


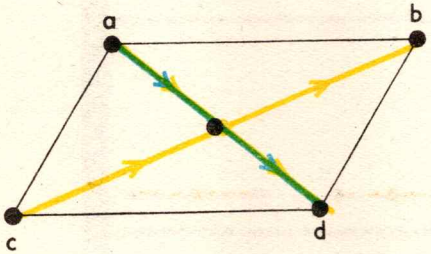
Proyecta estos **pares ordenados equipolentes**

sobre *ad*, paralelamente a *bc* | sobre *bc*, paralelamente a *ad*

e indica en la forma habitual las proyecciones equipolentes.





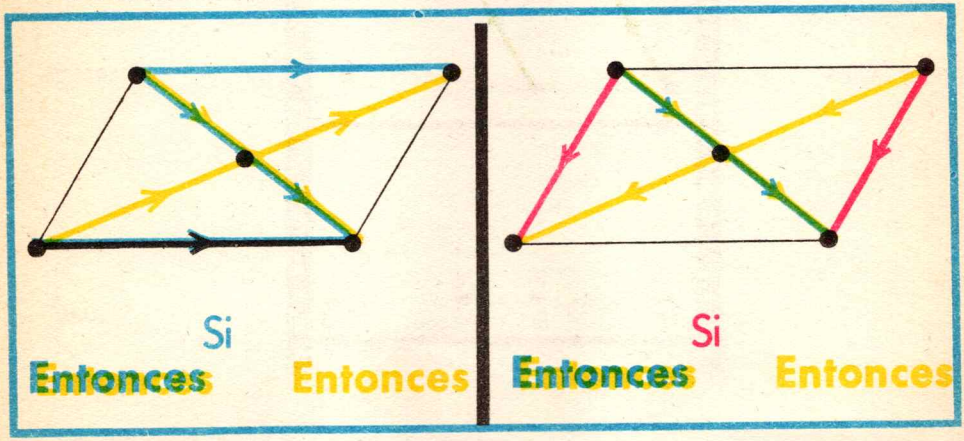


Hemos probado entonces la proposición,

PROPOSICIÓN 9 — *Si los puntos* **a, b, c, d** *no están alineados,*

$(a, b) \uparrow (c, d)$	$\Rightarrow$	$[a, d]$ y $[b, c]$ *tienen el mismo punto medio.*

$(a, c) \uparrow (b, d)$	$\Rightarrow$	$[a, d]$ y $[b, c]$ *tienen el mismo punto medio.*



7 — CRUZAMIENTO DE EQUIPOLENCIAS

TEOREMA 3 — $(a, b) \uparrow (c, d) \iff (a, c) \uparrow (b, d)$

DEMOSTRACIÓN: Este teorema ha sido demostrado para el caso de puntos *a*, *b*, *c*, *d* no alineados (prop. 3, pág. 347).

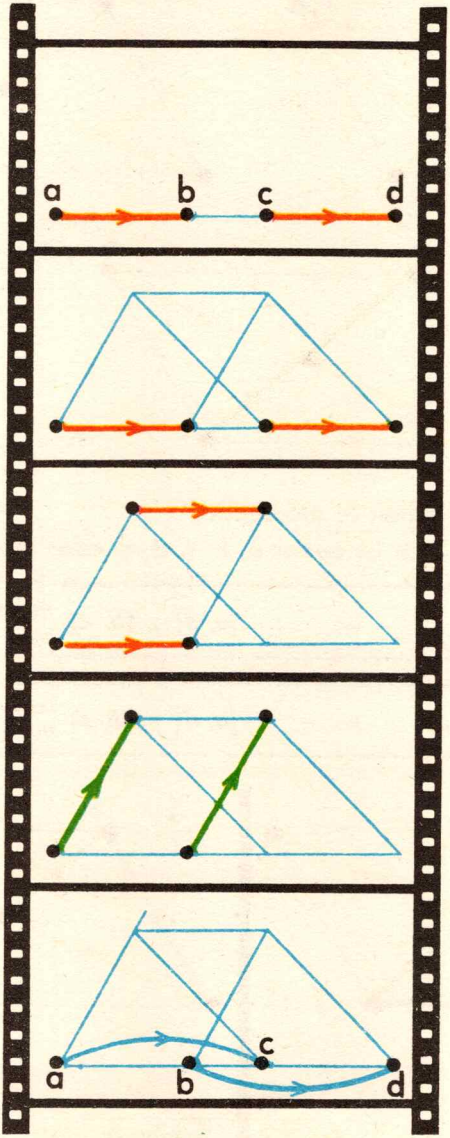
Veamos el filme de la demostración para *a*, *b*, *c*, *d* alineados.

¡cruzamos!

proposición 3

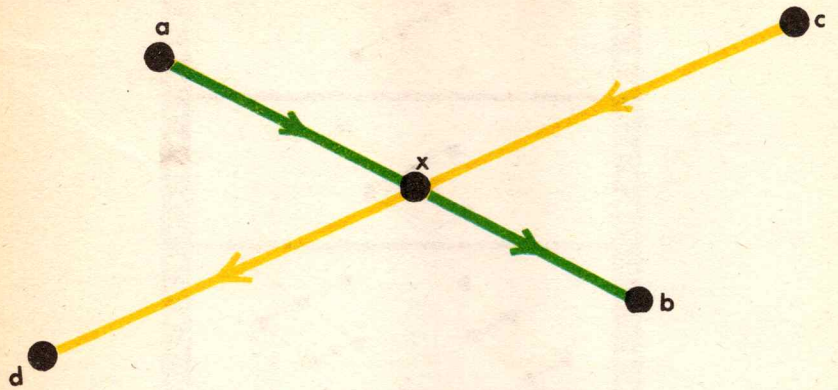
proyectamos

teorema 2



EJERCICIOS

1. Examina esta situación:



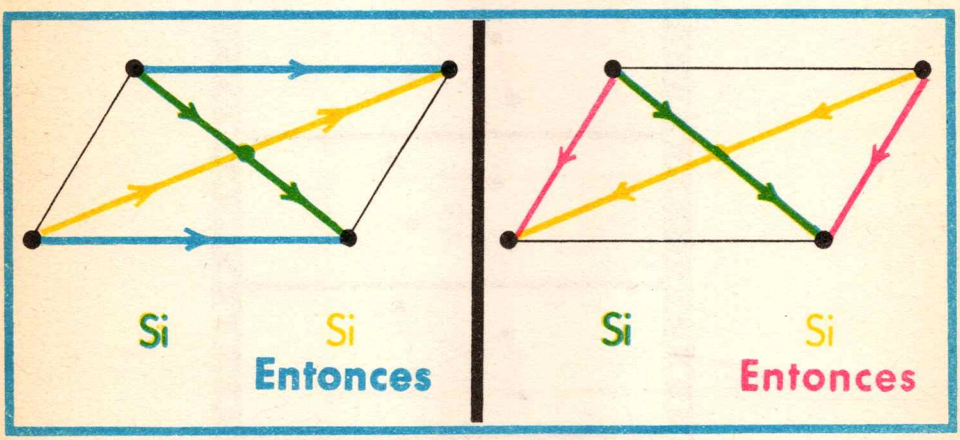
— ¿Qué información proporciona el dibujo?
— y
— ¿Cómo podemos formular además este hecho, utilizando la noción de centro o de punto medio?

y tienen el mismo centro.
y tienen el mismo punto medio.

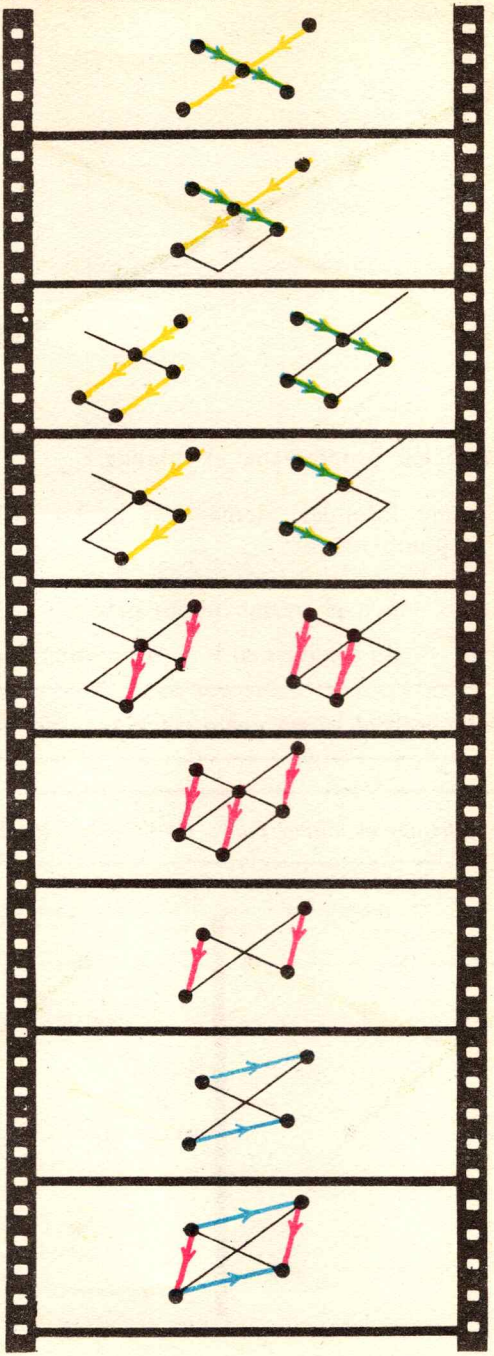
PROPOSICIÓN 10 — *Si los puntos **a, b, c, d** no están alineados,*

[ad] y **[bc]** *tienen el mismo punto medio* ⇒ **(a, b) ↑ (c, d)**

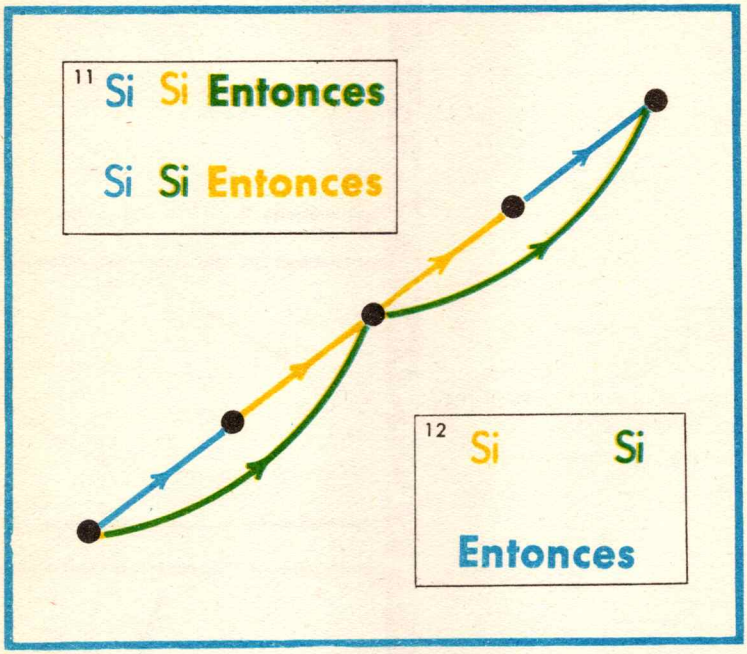
[ad] y **[bc]** *tienen el mismo punto medio* ⇒ **(a, c) ↑ (b, d)**



He aquí el filme de la demostración.



Vamos a demostrar que las proposiciones 9 y 10 siguen siendo válidas cuando los puntos están alineados.



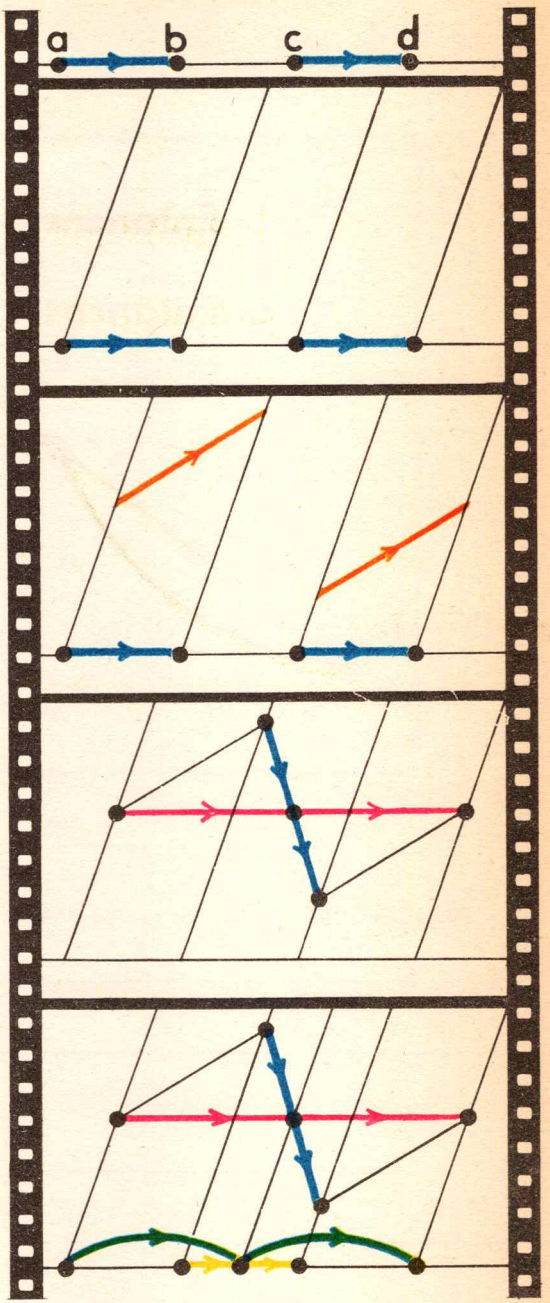
PROPOSICIÓN 11 — *Si los puntos* **a, b, c, d** *están alineados,*

$(a, b) \uparrow (c, d)$	$\Rightarrow$	$[a, d]$ y $[b, c]$ *tienen el mismo punto medio*

Igualmente,

$(a, c) \uparrow (b, d)$	$\Rightarrow$	$[a, d]$ y $[b, c]$ *tienen el mismo punto medio*

Veamos un filme que demuestra esta proposición:



Proyectamos los vectores equipolentes azules sobre rectas paralelas y se aplica el teorema 2.

Se aplica la proposición 9.

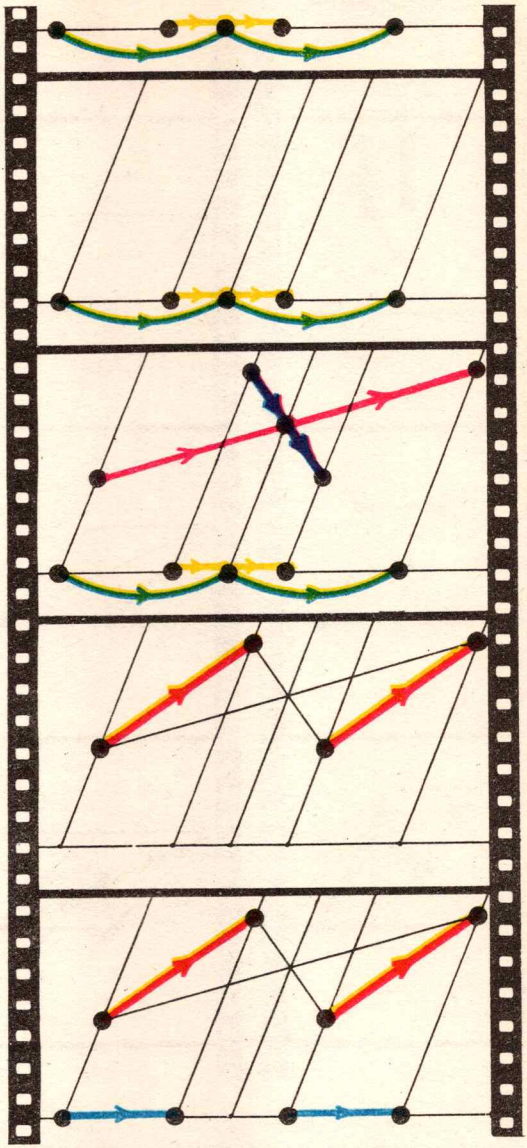
Se aplica el teorema 2.

PROPOSICIÓN 12 — *Si los puntos* **a, b, c, d** *están alineados,*

$[a, d]$ y $[b, c]$ *tienen el mismo punto medio* $\Rightarrow$ $(a, b) \uparrow (c, d)$.

$[a, d]$ y $[b, c]$ *tienen el mismo punto medio* $\Rightarrow$ $(a, c) \uparrow (b, d)$.

Sigamos el filme que demuestra esta proposición.



Se aplica el teorema 2.

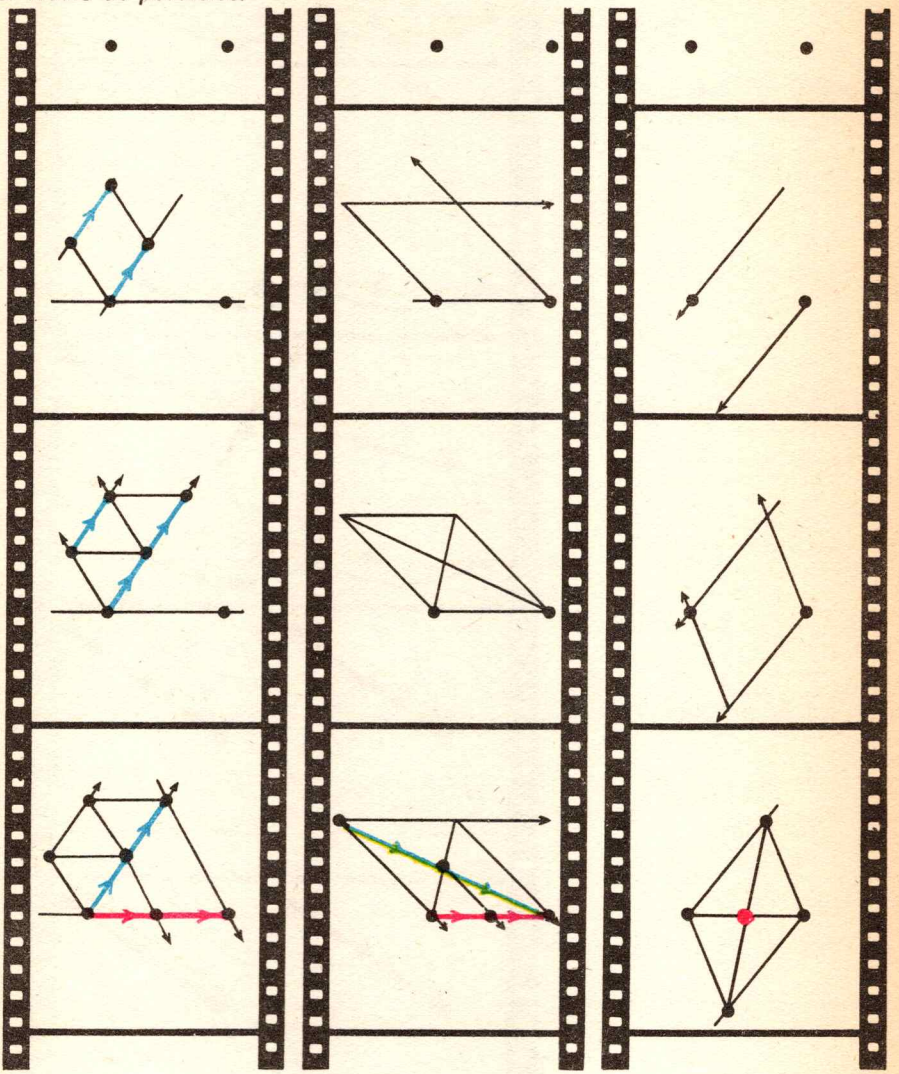
Se aplica la proposición 10.

Se aplica el teorema 2.

3. $(a, b) \uparrow (c, d) \iff [ad]$ y $[bc]$ *tienen el mismo punto medio* $\iff (a, c) \uparrow (b, d)$

8 — CONSTRUCCIONES

1. Estos tres filmes proporcionan tres métodos para construir el centro de un par *por medio de paralelas.*



Explica y justifica las construcciones presentadas en los tres filmes.

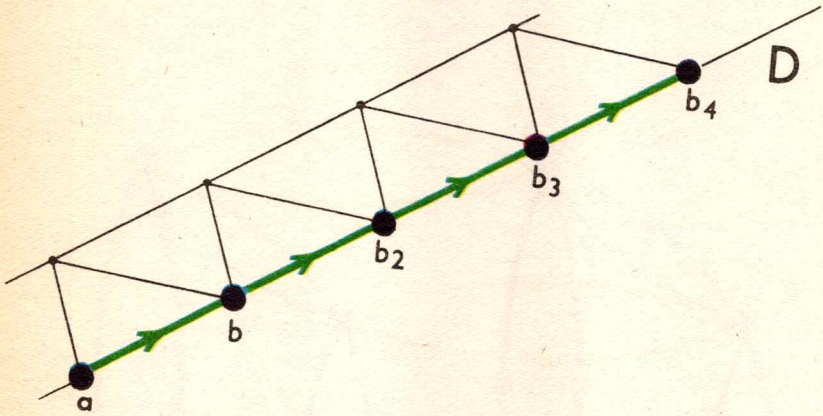
Advertirás que el último método es el más expeditivo.

Sin embargo, los dos primeros métodos son muy instructivos, como podrás ver más adelante.

2. Tenemos dos puntos a, b.

¿Quieres construir b_2, b_3, b_4, ... tales que

$(a, b) \uparrow (b, b_2) \uparrow (b_2, b_3) \uparrow (b_3, b_4) \uparrow \ldots$



Explica y justifica.

De este modo hemos esbozado una **graduación de la recta.**

¿Quieres prolongar esta graduación en los dos sentidos?

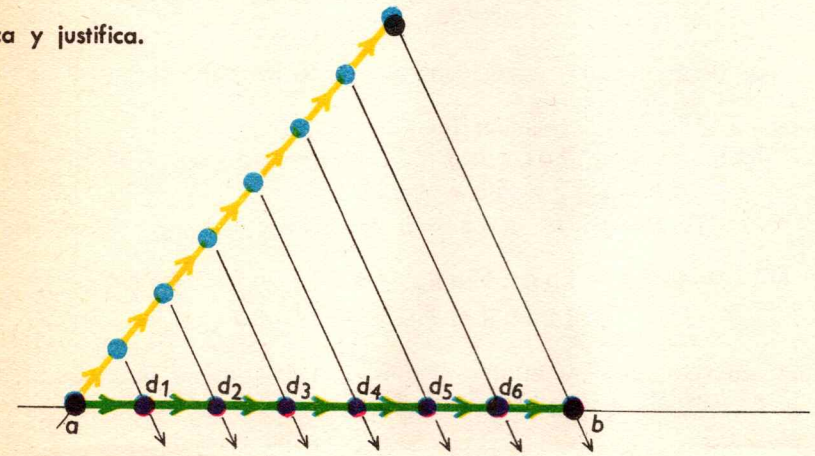
Utilizaremos en lo sucesivo rectas graduadas desentendiéndonos del procedimiento seguido para graduarlas.

3. Tenemos los puntos a, b.

¿Quieres construir puntos d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 tales que

$(a, d_1) \uparrow (d_1, d_2) \uparrow (d_2, d_3) \uparrow (d_3, d_4) \uparrow (d_4, d_5) \uparrow (d_5, d_6) \uparrow (d_6, b)$?

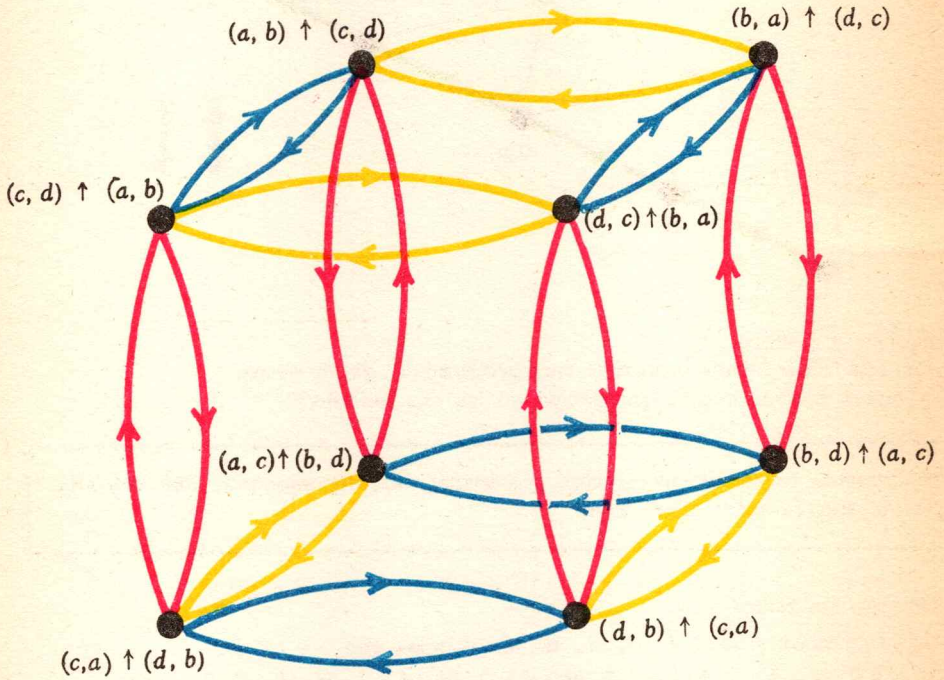
Explica y justifica.



EJERCICIOS

1. Hemos visto tres maneras de transformar una equipolencia en una nueva equipolencia:

f : $(a, b) \uparrow (c, d) \rightarrow (c, d) \uparrow (a, b)$ (prop. 2).
g : $(a, b) \uparrow (c, d) \rightarrow (b, a) \uparrow (d, c)$ (prop. 4).
h : $(a, b) \uparrow (c, d) \rightarrow (a, c) \uparrow (b, d)$ (teor. 3).



TRANSFORMACIONES DE EQUIPOLENCIAS
GRÁFICO 154

— f, g, h son permutaciones en el conjunto E de las ocho fórmulas que figuran en el dibujo anterior.
Llamemos i a la transformación idéntica en E.
Muestra que: $i \circ i = i$, $f \circ i = i \circ f = f$, $g \circ i = i \circ g = g$, $h \circ i = i \circ h = h$.
$f \circ f = g \circ g = h \circ h = i$.
$f \circ g = g \circ f$, $g \circ h = h \circ f$, $f \circ h = h \circ g$.

De lo anterior deduce: $f \circ g \circ f = g$, $g \circ h \circ f = h$, $f \circ h \circ g = h$.
$g \circ f \circ g = f$, $h \circ g \circ h = f$, $h \circ f \circ h = g$.

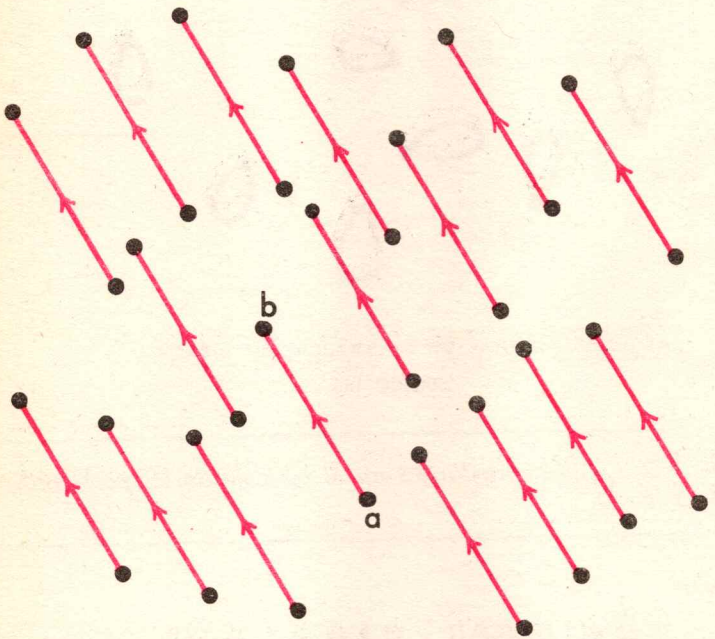
2. La recta que contiene los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralela a los otros dos lados.

22

Traslaciones

1 — TRASLACIONES

Tenemos un par ordenado (a, b).
¿Quieres dibujar algunos pares ordenados equipolentes a (a, b)?



ALGUNAS FLECHAS DE LA TRANSLACIÓN $\overrightarrow{ab}$

GRÁFICO 155

Si $a = b$ la situación es ésta:

ALGUNAS FLECHAS DE LA TRASLACIÓN IDÉNTICA

GRÁFICO 156

DEFINICIÓN 1 — *Se llama* ***traslación*** $\vec{ab}$ *al conjunto de los pares ordenados equipolentes a* (a, b).

En fórmula:

$$\vec{ab} = \{ (x, y) \in \Pi \times \Pi \mid (x, y) \uparrow (a, b) \}$$

Luego,

$$\vec{ab} = \vec{cd} \iff (a, b) \uparrow (c, d)$$

La transformación idéntica 1_Π, que es el conjunto de los pares ordenados equipolentes a (a, a), es una traslación.

$$1_\Pi = \overrightarrow{aa} = \overrightarrow{bb} = \overrightarrow{cc}.$$

Hemos visto (cap. 21) que todo punto de Π
es el origen de un par ordenado y solo uno, equipolente a (a, b),
y el extremo de un par ordenado, y solo uno, equipolente a (a, b).

En fórmulas:

$$(a, b) \uparrow (a, y) \Rightarrow y = b \qquad (a, b) \uparrow (x, b) \Rightarrow x = a$$

Es interesante deducir esta doble afirmación del teorema del cruzamiento (cap. 21, teor. 3, pág. 368):

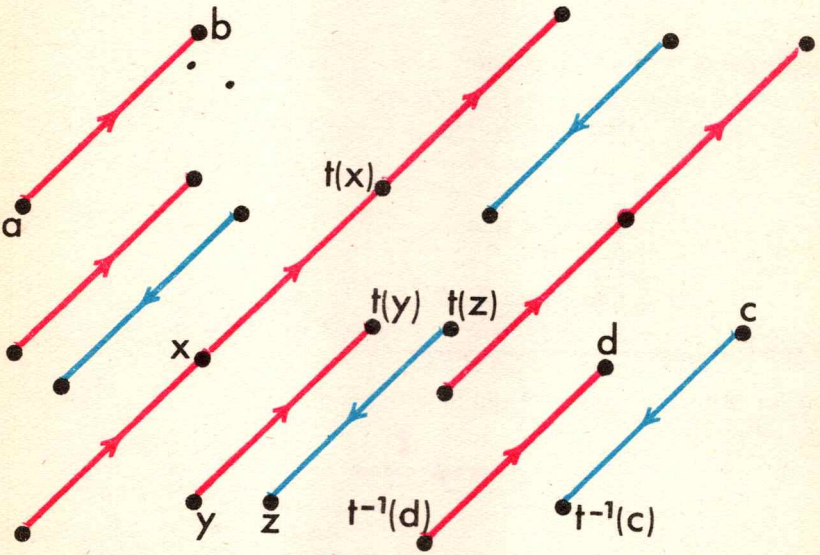
$$(a, b) \uparrow (a, y) \Rightarrow (a, a) \uparrow (b, y) \Rightarrow y = b$$
$$(a, b) \uparrow (x, b) \Rightarrow (a, x) \uparrow (b, b) \Rightarrow x = a$$

Todo punto del plano es el origen de un par, y solo uno, de ab, y el extremo de un par, y solo uno, de $\overrightarrow{ab}$: *la traslación* $\overrightarrow{ab}$ *es una permutación en el plano* Π.

Como $(x, y) \uparrow (a, b) \iff (b, a) \uparrow (y, x)$

la traslación ba es la recíproca de ab.

TEOREMA 1 — **La traslación ab es una permutación cuya recíproca es ba.**



ALGUNAS FLECHAS DE $t = \overrightarrow{ab}$ ALGUNAS FLECHAS DE $\overrightarrow{ba}$

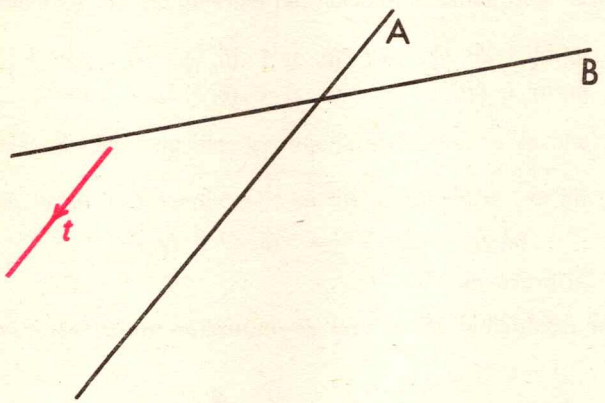
GRÁFICO 157

EJERCICIOS

1. Explica y justifica las notaciones usadas en el dibujo anterior.

2. Dibuja un gato. El dibujo representa una parte G de Π.
Representa una traslación t.
Dibuja la imagen tG de G por t.
Dibuja, además, $t^2G = t(tG)$, t^3G, t^4G, ...
Dibuja, por último, $t^{-1}G$, $t^{-2}G = t^{-1}(t^{-1}G)$, $t^{-3}G$, ...
¿Qué compruebas?

3. ¿Cuáles son las imágenes de las rectas A y B por la traslación t?
¿Qué conclusión sacas?

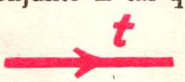


4. Fija un punto x y una traslación u.
¿Quieres construir $u(x)$, $u^2(x) = u(u(x))$,
$u^3(x)$ ..., $u^{-1}(x)$, $u^{-2}(x) = u^{-1}(u^{-1}(x))$, $u^{-3}(x)$, ...

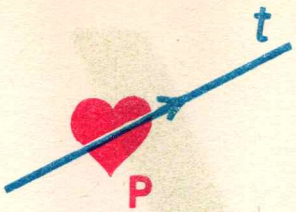
5. Fija una traslación t.
Halla una parte E de Π tal que tE = E.
Hay numerosas respuestas.

6. Fija un punto x y una traslación t.
¿Quieres hallar un conjunto E que contenga a x y tal que E = tE?
Da muchas respuestas a esta pregunta.

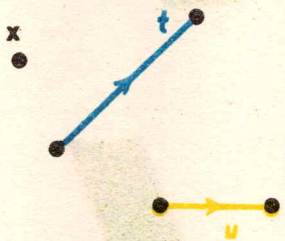
7. ¿Cuál es el más pequeño conjunto E tal que $x \in E = tE$ (t designa una traslación)?



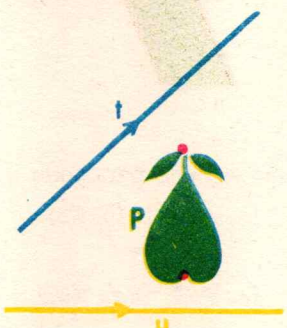
8. ¿Cuál es el más pequeño conjunto E tal que $P \subset E = tE$ (t designa una traslación)?



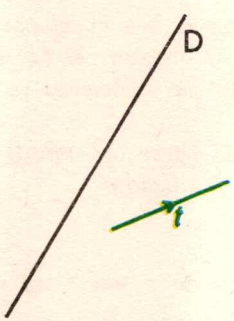
9. ¿Cuál es el más pequeño conjunto E tal que $x \subset E = tE = uE$ (t y u designan traslaciones)?



10. ¿Cuál es el más pequeño conjunto E tal que $P \subset D = tE = uE$ (t y u designan traslaciones)?



11. ¿Cuál es el más pequeño conjunto E tal que $B \subset E = tE$ (t designa una traslación)?



12. ¿Cuál es el más pequeño conjunto E tal que $B \subset E = tE$ (t designa una traslación)?

13. La misma pregunta.

14. Si t designa una traslación se tiene para todo $a, b \in \Pi$:

$$(a, t(a)) \uparrow (b, t(b))$$

¿Quieres deducir

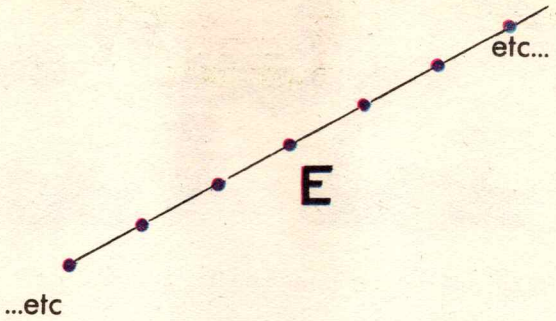
$$(a, b) \uparrow (t(a), t(b))$$

¿Qué teorema has aplicado?

15. Si t designa una traslación y $a, b \in \Pi$, *el par ordenado* $(t\,(a), t(b))$ será como es natural, llamado la *imagen de* (a, b) *por* t.
Acabas de probar que todo par ordenado es equipolente a su imagen por una traslación.
¿Quieres probar que si *dos pares ordenados son equipolentes también lo son sus imagenes por una traslación*?

16. $$\vec{ab} = \vec{cd} \iff \vec{ba} = \vec{dc} \iff \vec{cd} = \vec{ab} \iff \vec{dc} = \vec{ba}$$
$$\iff \vec{ac} = \vec{bd} \iff \vec{bd} = \vec{ac} \iff \vec{ca} = \vec{db} \iff \vec{bd} = \vec{ca}\,.$$

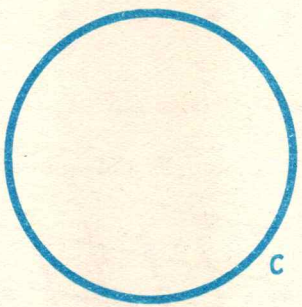
17. Este es un fragmento de un conjunto infinito E.



¿Cuáles son las traslaciones t tales que $E = tE$?

18. Si $D \in \mathfrak{D}$, ¿cuáles son las traslaciones t tales que $tD = D$?

19.



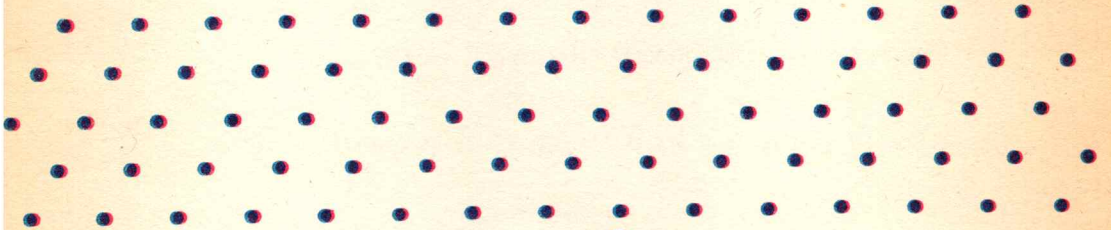
¿Existe una traslación t tal que $tC = C$?

20. He aquí un fragmento de un friso F (que supondremos prolongado indefinidamente en los dos sentidos).

¿Cuáles son las traslaciones t tales que $tF = F$?

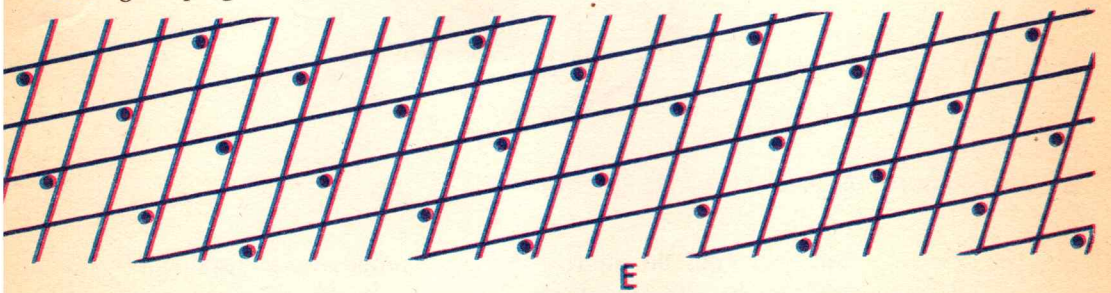
21. La misma pregunta para el friso siguiente.

22. Éste es un fragmento de un punteado infinito E.

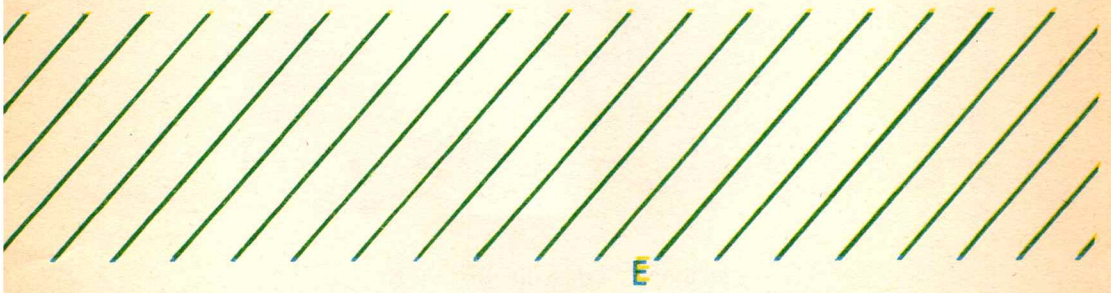


¿Cuáles son las traslaciones t tales que $tE = E$?

23. Igual pregunta para el conjunto E, del que vemos un fragmento.



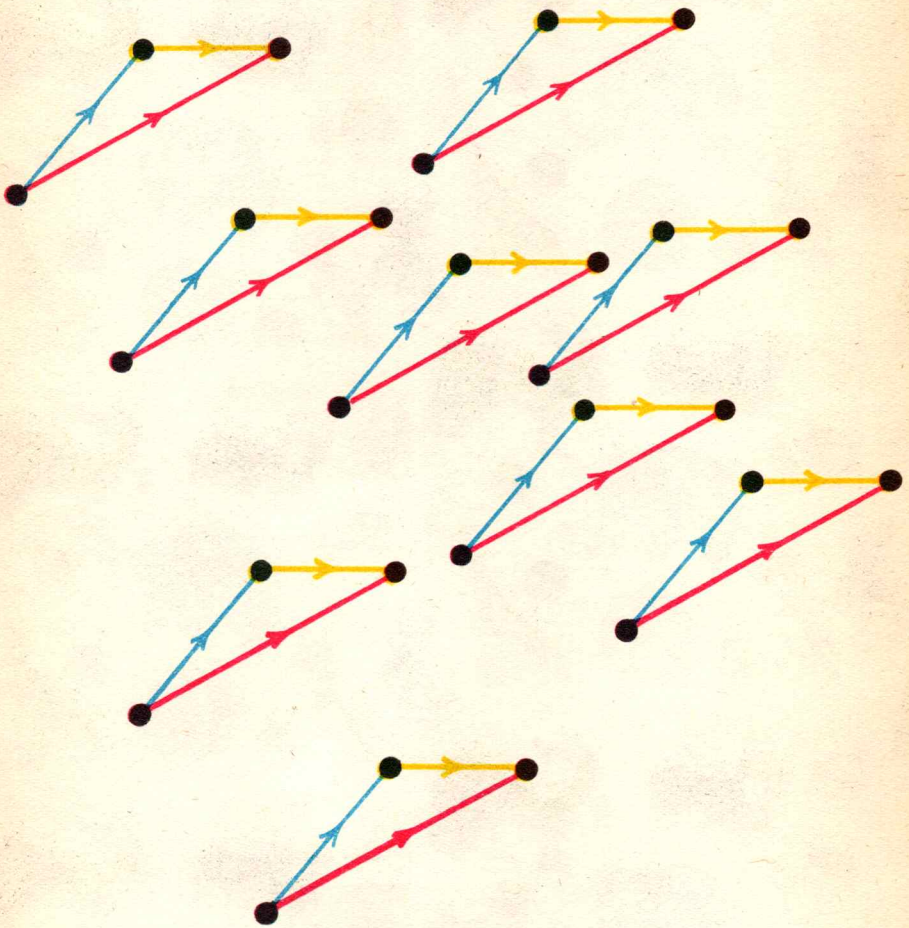
24. Igual pregunta para el conjunto E del que mostramos un fragmento.



25 Igual pregunta para el tapiz infinito T del que presentamos una muestra.

2 — EL GRUPO DE LAS TRASLACIONES

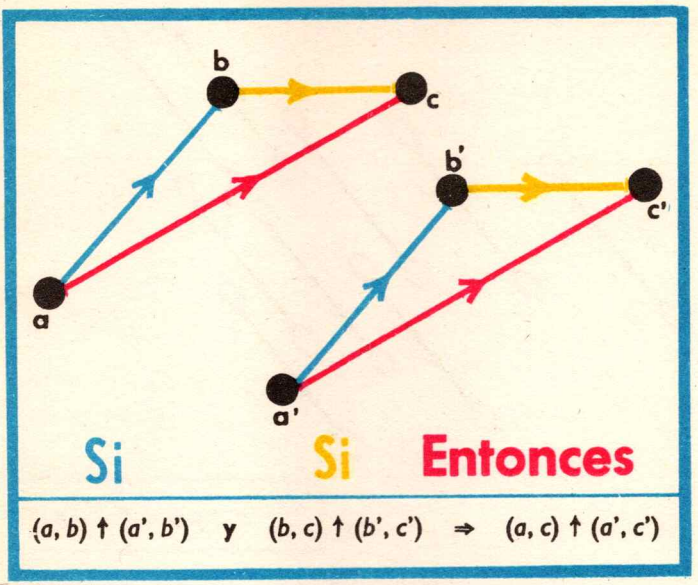
— Dibuja en azul algunas flechas de la traslación *t*,
en amarillo, algunas flechas de la traslación *u*,
en rojo, algunas flechas de la compuesta *u* o *t*.



ALGUNAS FLECHAS DE LAS TRASLACIONES *t* Y *u* Y DE LA COMPUESTA *u* o *t*

GRÁFICO 158

— ¡La compuesta *u* o *t* es una traslación!
— Vamos a demostrarlo. Tendremos que probar que



DEMOSTRACIÓN:									
(¡cruzamos!)	⇒	(a, b)	↑	(a', b')	y	(b, c)	↑	(b', c')	
(transitividad de ↑)	⇒	(a, a')	↑	(b, b')	y	(b, b')	↑	(c, c')	
(¡cruzamos!)	⇒			(a, a')	↑	(c, c')			
	⇒			(a, c)	↑	(a', c')			l.q.q.d.

Acabamos de probar que *la compuesta de dos traslaciones es una traslación.*
Sabes, por otra parte, que *la composición de relaciones es asociativa.*
En particular, la composición de traslaciones es asociativa.
La traslación idéntica 1_π es neutra para la composición.

$t \circ 1_\pi = t = 1_\pi \circ t$

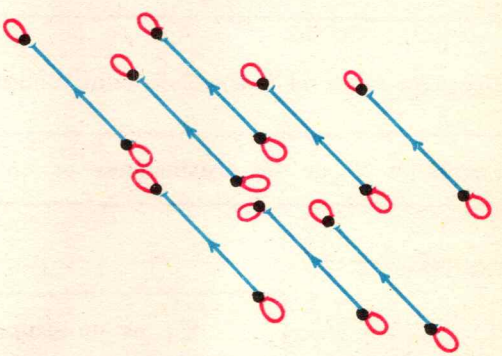
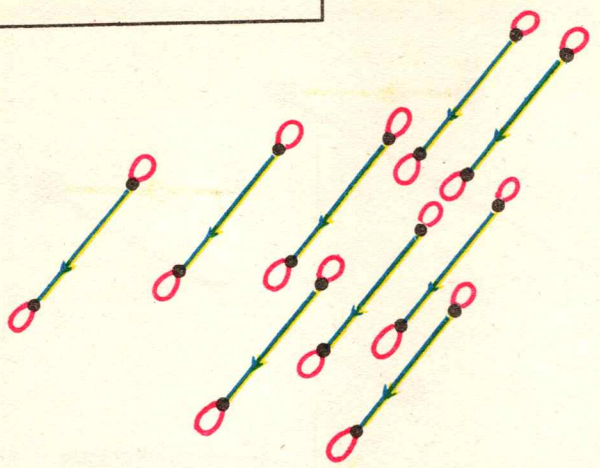


GRÁFICO 159

LA TRASLACIÓN IDÉNTICA 1_π EN NEUTRA PARA LA COMPOSICIÓN

Por último, para toda traslación t, la recíproca t^{-1} es una traslación (teorema 1).

y



$$t^{-1} \circ t = 1_{\pi} = t \circ t^{-1}$$

GRÁFICO 160

Acabamos de probar que

La compuesta de dos traslaciones es una traslación.
La composición de traslaciones es asociativa.
La traslación idéntica 1_{π} es neutra para o.
Para toda traslación t:

$$t^{-1} \circ t = 1_{\pi} = t \circ t^{-1}$$

Como ya sabes, el conjunto de estas condiciones se expresa diciendo:

El conjunto $\mathcal{T}$ de las traslaciones es un grupo para la composición

Más breve:

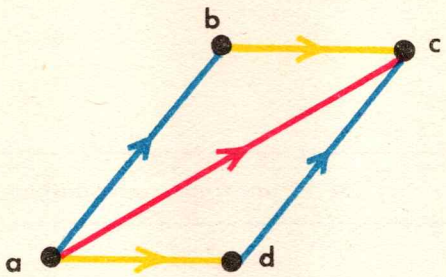
$\mathcal{T}$, es un grupo

3 — CONMUTATIVIDAD DEL GRUPO DE LAS TRASLACIONES

Sabes que la composición de relaciones no es conmutativa.
Así, si M designa la relación "madre" y P la relación "padre", entonces,

$$P \circ M \neq M \circ P$$

Volvamos a la situación del gráfico 158, pág. 386 y comparemos $u \circ t$ y $t \circ u$.



$u \circ t = t \circ u$

En este dibujo ***a, b, c*** *no están alineados.*

¿Quieres representar la misma situación para ***a, b, c*** alineados?

Traza los pares ordenados (a, b), (b, c), (a, d).

Tenemos $(a, d) \uparrow (b, c)$

Crucemos: $(a, b) \uparrow (d, c)$

Podemos, pues, completar este esquema:

Así, hemos mostrado que en todos los casos,

$$t \circ u = u \circ t$$

Recapitulemos lo importante del conjunto de los resultados obtenidos en este parágrafo y el precedente:

TEOREMA 2 — **El conjunto de las traslaciones es un grupo conmutativo para la composición.**

Brevemente:

$$\mathcal{T}, \circ \text{ es un grupo conmutativo}$$

EJERCICIOS

1. ¿Qué grupos hemos encontrado hasta aquí?
   $\mathcal{E}, \circ$ $\quad$ $Z, +$ $\quad$ $\mathcal{T}, \circ$
   En los tres casos se trataba de un conjunto dotado de una ley u operación. Indica para cada uno de ellos las cuatro propiedades que nos han permitido reconocerlos como grupos.

2. ¿Cuándo diremos que G, * es un grupo?
   G, * es un grupo ssi G es un conjunto y * una ley tal que

1. Si $x, y \in G$	entonces $x * y \in G$
2. Si $x, y, z \in G$	entonces $(x * y) * z = x * (y * z)$
3. Existe un elemento $\nu \in G$ tal que	Si $g \in G$: $g * \nu = g = \nu * g$
4. Para todo $g \in G$, existe $\bar{g} \in G$ tal que	$g * \bar{g} = \nu = \bar{g} * g$

G, * es un GRUPO

3. ¿Cómo se traducen las cuatro condiciones 1, 2, 3, 4 recién enumeradas?
   * es una ley (interna).
   * es una ley asociativa.
   * admite el elemento neutro μ.
   todo elemento g tiene un simétrico g.

4. ¿Quieres formular de nuevo la definición de grupo en el lenguaje del ejercicio 3?

> **Se llama GRUPO G, ***
> **todo conjunto G dotado de una ley ***
> ***interna, asociativa,* que admite un *neutro***
> **y tal que todo elemento de G tiene un *simétrico*.**

GRUPO G, *

5. ¿Qué es un grupo conmutativo?
— Es un grupo cuya ley es conmutativa.

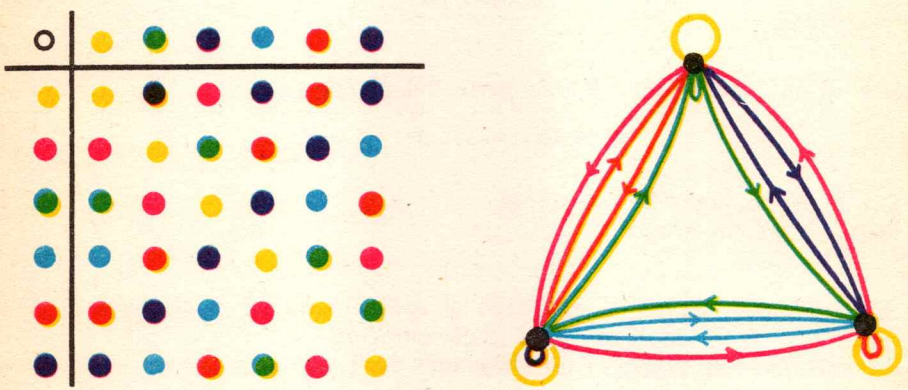
6. Para todo conjunto E,

$$\mathscr{P}E, \Delta$$

es un grupo conmutativo.

El conjunto vacío es su neutro.
Todo elemento de $\mathscr{P}E$ es su propio simétrico.

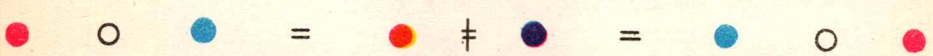
7. El grupo de las permutaciones en un conjunto de tres elementos no es conmutativo.



EL GRUPO $\mathfrak{S}\{a, b, c\}, \circ$ y SU TABLA DE COMPOSICIÓN

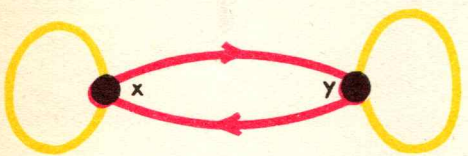
GRÁFICO 161

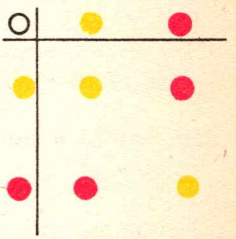
Este grupo no es conmutativo, puesto que



8. Tenemos un conjunto E, no vacío.
$\cup$ es una ley definida en $\mathcal{P}E$.
interna, asociativa, que admite el elemento neutro ϕ.
Y, sin embargo, $\mathcal{P}E$, $\cup$ no es un grupo.
¿Por qué?

9. El grupo de las permutaciones del par $\{x, y\}$ es conmutativo.





EL GRUPO $\mathfrak{S}\{x, y\}, o$ Y SU TABLA DE COMPOSICIÓN

GRÁFICO 162

10. Si t es una traslación y P una parte del plano,

$$tP = Q \iff t^{-1}Q = P$$

11. Sea E un conjunto no vacío.
$\mathcal{P}E$, $\cap$ ¿es un grupo?

12. Si D designa una recta, **entonces** el conjunto de las traslaciones t tales que $tD = D$ es un grupo para la composición.
Se dice que este grupo es un **subgrupo** de $\mathfrak{T}$, o.

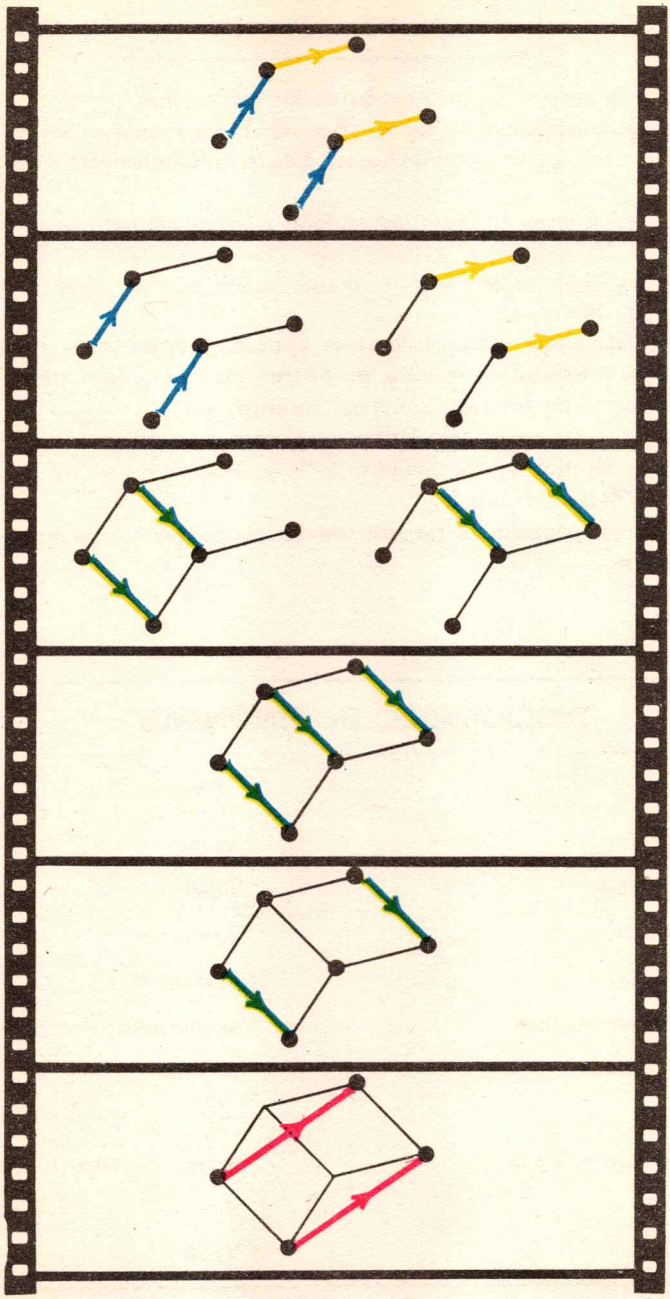
13. Si E designa una parte de Π, **entonces** el conjunto de las traslaciones t tales que $tE = E$ es un grupo para o.

14. ¿Cuál es el grupo de las traslaciones t tales que $t\Pi = \Pi$?

15. ¿Cuáles son los grupos de las traslaciones t tales que $tE = E$, en el caso de los ejercicios 17, 21, 22, 23, 24 de § 1?

16. Pregunta análoga para los ejercicios 19, 20, 25 de § 1.

17. Hemos demostrado en páginas anteriores que la compuesta de dos traslaciones es una traslación. ¿Quieres dibujar un filme de esa demostración?



4 – VECTORES, ADICIÓN DE VECTORES

ATENCIÓN : Notación

Hemos designado por $\mathfrak{T}$, o al grupo de las traslaciones.

Hemos usado hasta aquí el signo o que es el signo general de la composición, Cuando se trata de traslaciones se reemplaza frecuentemente el signo o por el signo $+$.

Más adelante podrás apreciar las ventajas de esta notación adoptada universalmente.

El pasaje del signo o al signo $+$ se acompaña con un cambio general de la terminología y de las notaciones.

Es preciso, pues, el esfuerzo necesario para asimilar este nuevo lenguaje.

La traslación t tomará el nombre de **vector** y se designará preferentemente $\vec{t}$.

La recíproca t^{-1} de la traslación t se indicará $\rightarrow \vec{t}$.

y tomará el nombre de **vector simétrico u opuesto** del vector $\vec{t}$.

La traslación idéntica 1_π se escribirá $\vec{o}$ y se tomará el nombre de **vector nulo.**

El conjunto $\mathfrak{T}$ será ahora V.

Aquí tienes un pequeño diccionario de sinónimos que te ayudarán a pasar de un lenguaje al otro.

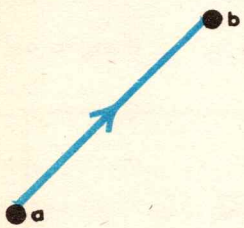
DICCIONARIO DE SINÓNIMOS

o	+
traslación	*vector*
composición	*adición*
compuesta	*suma*
traslación t	*vector* $\vec{t}$
traslación idéntica	*vector nulo*
1_π	$\vec{o}$
t^{-1}	$-\vec{t}$
traslación recíproca	*vector simétrico (u opuesto)*
$\mathfrak{T}$	V
$\mathfrak{T}$, o	V, +

A título de ejemplo enunciemos en el nuevo lenguaje las propiedades que aseguran que V, $+$ es un grupo conmutativo.

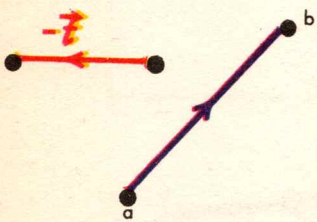
1. Para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$: $\vec{u} + \vec{v} \in V$.
2. Para todo $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.
3. Para todo $\vec{v} \in V$: $\vec{v} + \vec{o} = \vec{v} = \vec{o} + \vec{v}$.
4. Para todo $\vec{v} \in V$: $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{o} = (-\vec{v}) + \vec{v}$.
5. Para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

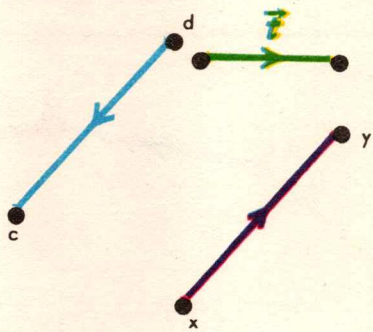
Como todo par ordenado define una *traslación* o *vector*, representaremos de buen grado *un vector* (= una traslación) por un par ordenado.



EL VECTOR O LA TRASLACIÓN $\vec{ab}$

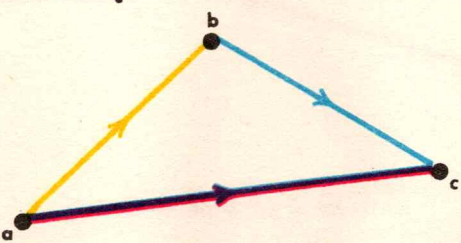
EL VECTOR NULO





$\vec{ab} = -\vec{dc} = \vec{xy}$

EL VECTOR $\vec{t}$ Y SU OPUESTO $-\vec{t}$



$\vec{ac} = \vec{ab} + \vec{bc}$

Si $\vec{u}$ et $\vec{t}$ designan vectores se establecerá que

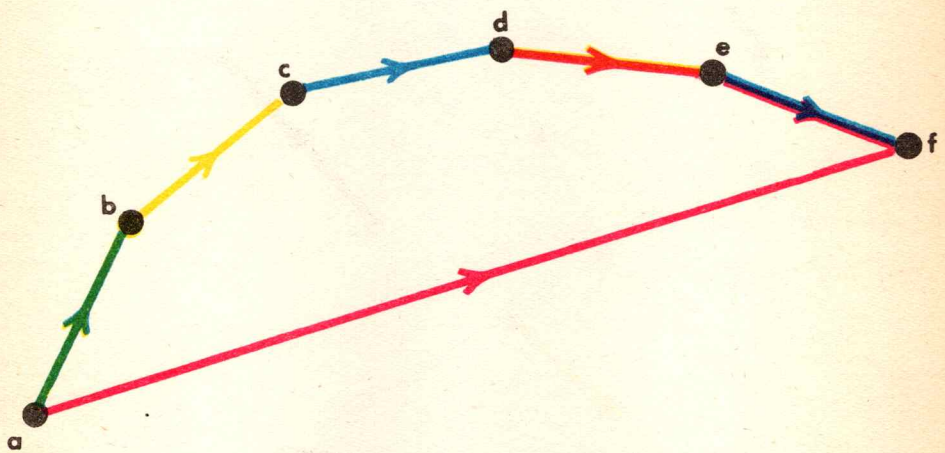
$$\vec{u} - \vec{t} = \vec{u} + (-\vec{t})$$

Así,

$$\begin{aligned} \vec{ac} &= \vec{ab} + \vec{bc} \\ &= \vec{bc} + \vec{ab} \\ &= \vec{bc} + (-\vec{ba}) \\ &= \vec{bc} - \vec{ba} \end{aligned}$$

TEOREMA 3 — **Si cada una de las letras *a*, *b*, *c* ... designa un punto de Π**

$$\vec{ab} + \vec{bc} = \vec{ac}$$
$$\vec{ab} + \vec{bc} + \vec{cd} + \ldots + \vec{hk} = \vec{ak}$$
$$\vec{aa} = \vec{o}$$
$$-\vec{ab} = \vec{ba}$$
$$\vec{bc} = \vec{ac} - \vec{ab}$$



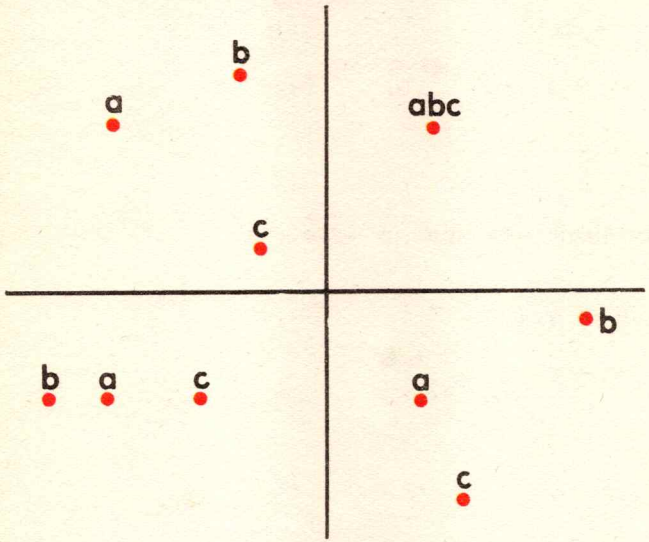
$$\vec{ab} + \vec{bc} + \vec{cd} + \vec{de} + \vec{ef} = \vec{af}$$

EJERCICIOS

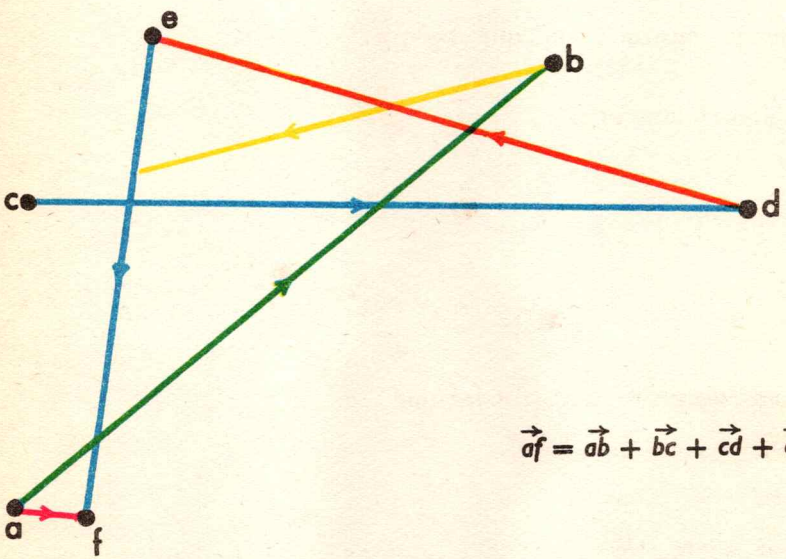
1. Quieres hallar x tal que resulte

$$\vec{ab} = \vec{cx}$$

en las diversas situaciones siguientes:



2.

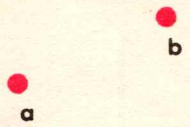


$$\vec{af} = \vec{ab} + \vec{bc} + \vec{cd} + \vec{de} + \vec{ef}$$

3. Si cada una de las letras $a, b, c, d, e, \ldots, x, y, z$ designa un punto de Π,

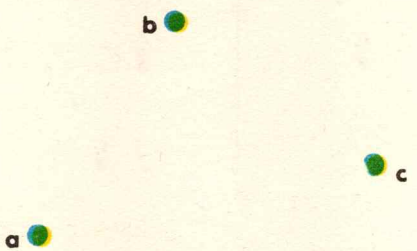
$$\vec{ab} + \vec{bc} + \vec{cd} + \ldots + \vec{xy} + \vec{yz} + \vec{za} = \vec{o}.$$

4. He aquí puntos a, b.



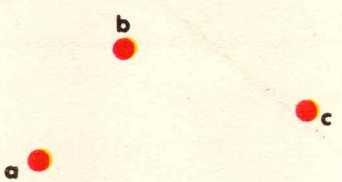
¿Quieres construir x tal que $\vec{ax} = \vec{ab} + \vec{ab}$

5. He aquí puntos a, b, c.



¿Quieres construir x tal que $\vec{cx} = \vec{ba} + \vec{ba} + \vec{ba}$

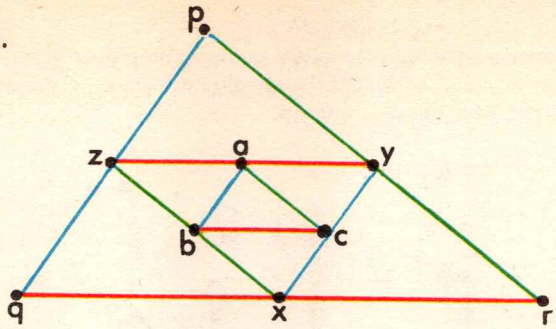
6. He aquí puntos a, b, c.



¿Quieres construir x, y, z tales que

$$\begin{aligned} \vec{bx} &= \vec{ac} \\ \vec{bz} &= \vec{ca} \\ \vec{ay} &= \vec{bc} \end{aligned}$$

8. Mira este dibujo.



Nos hemos dado primero el triángulo *abc*.
¿Cómo hemos hecho las otras construcciones?
Hemos trazado exclusivamente paralelas (y determinado intersecciones de rectas).

Justifica las fórmulas

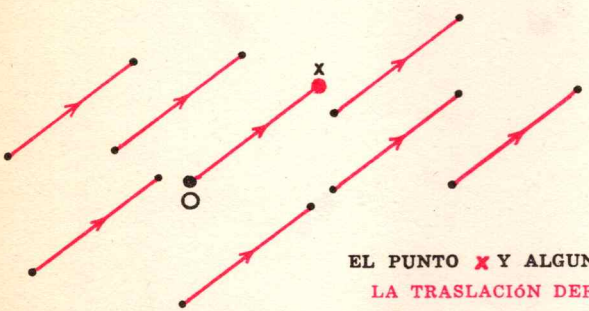
$$\vec{yz} = \vec{cb} + \vec{cb}$$
$$\vec{pr} = \vec{zx} + \vec{zx}$$

$$\vec{qp} = \vec{ba} + \vec{ba} + \vec{ba} + \vec{ba}.$$

5 — EL GRUPO Π_o, +

En el plano Π, elijo un punto y lo llamo o.

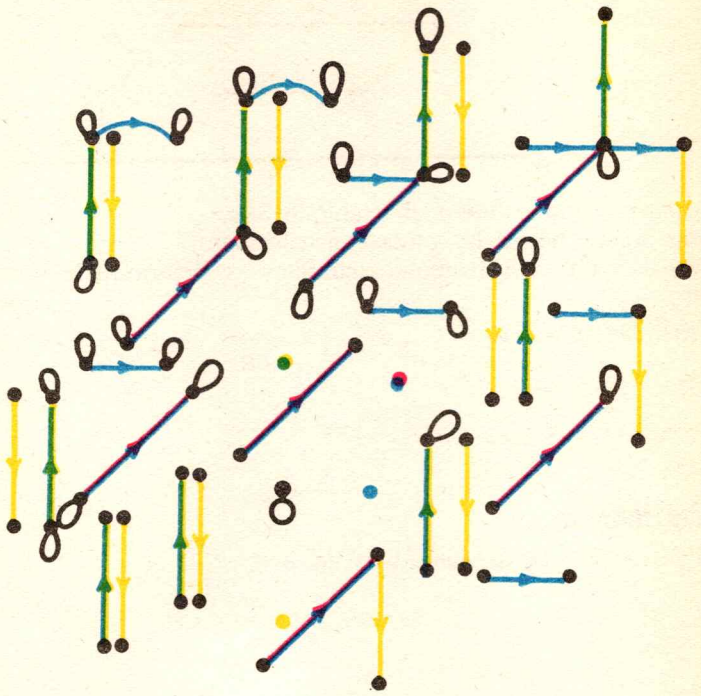
Todo punto $x \in \Pi$ define, entonces, un **vector** (= una **traslación**) $\vec{ox}$ (que se designará a veces $\vec{x}$).



EL PUNTO x Y ALGUNOS PARES ORDENADOS DE LA TRASLACIÓN DEFINIDA POR x

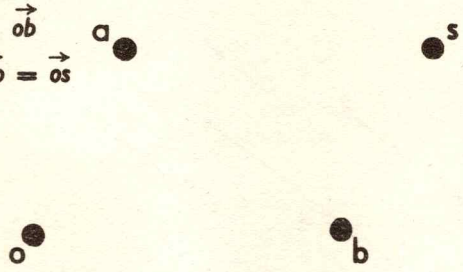
GRÁFICO 163

Marca un punto negro; llámalo o.
Marca en diversos colores otros puntos del plano Π.
Traza en el color correspondiente algunos pares ordenados de la traslación definida por cada uno de esos puntos.



En cuanto un punto de Π es designado o, todo punto x ε Π representa un vector: el vector o la traslación ox (a veces designado x).

Tienes dos puntos *a*, *b*
Resulta $\vec{oa}$ et $\vec{ob}$
Compone $\vec{oa} + \vec{ob} = \vec{os}$

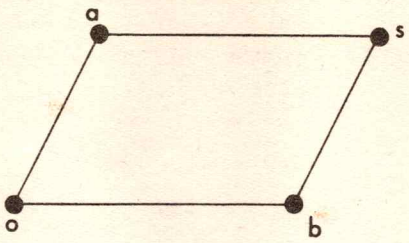


En lugar de escribir

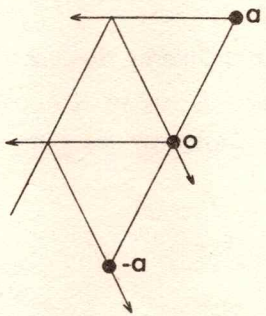
$$\vec{oa} + \vec{ob} = \vec{os}$$

pondremos simplemente

$$a + b = s$$



— Marca el punto que ahora resulta natural llamar — *a*.



— El plano Π se ha convertido así en un **grupo conmutativo** que designaremos por

$$\Pi_o, +$$

. . . y el plano se ha convertido en

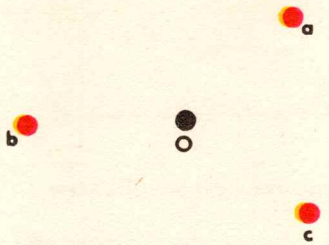
EL GRUPO

Π_o, +

EJERCICIOS

1 En Π_o, $+$ construye

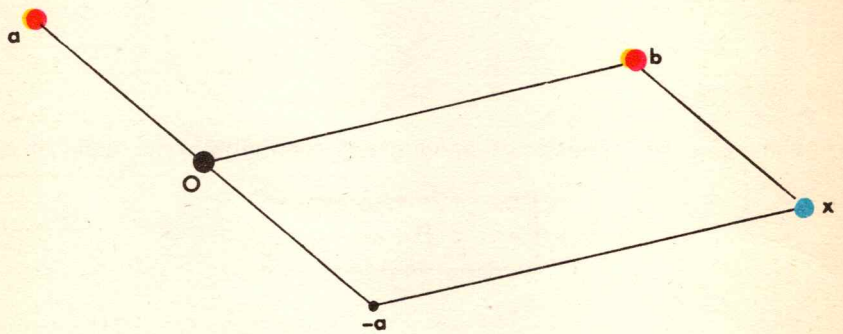
$$a + b, \quad b + a, \quad a + c, \quad b + c, \quad a + b + c,$$
$$a + a, \quad b + a + b, \quad a + a + a, \quad c + a + b,$$
$$-a, \quad -b, \quad (-a) + (-b) = -a - b, \quad -(a + b),$$
$$a + o, \quad a + (-a) = a - a, \quad (-b) + b = -b + b.$$



2. En Π_o, $+$ te dan a, b. ¿Quieres resolver las ecuaciones

$$a + x = b, \quad b + y = a, \quad a + b + z = o.$$

(Te piden, pues, que construyas los puntos x, y, z que satisfacen estas fórmulas).



3. En Π_o, $+$ para todo punto $a \in \Pi$:

$$-(-a) = a$$
$$o + a = a$$

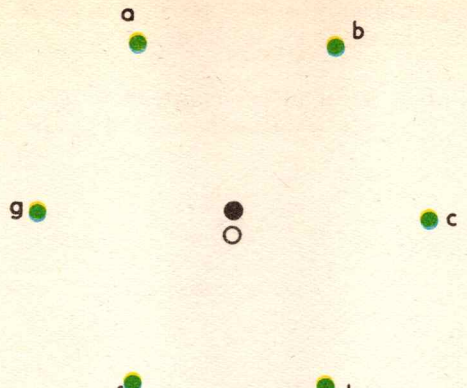
4. En Π_o, $+$ para todo x, $y \in \Pi$:

$$-(x + y) = (-x) + (-y) = -x - y.$$

5. En Π_o, $+$ ¿quieres construir tres puntos a, b, c tales que

$$a + b + c = o$$

6. En Π_o, +



$$a + b + c + d + f + g = o$$
$$a + d = o$$
$$f = -b,$$
$$c = -g,$$
$$a + c + f = o$$
$$a + c = b$$

¿Quieres construir $+ b, b + c, c + d, d + f, f + g, g + a$?
¿Qué piensas?

7. Si cada una de las letras a, b, o designa un punto de Π,

$$\vec{ab} = -\vec{ba}$$
$$\vec{oo} = \vec{o}$$
$$\vec{ao} = -\vec{oa}$$
$$\vec{oa} = -\vec{ao}$$

8. En Π_o, +

$$\vec{ab} = b - a.$$

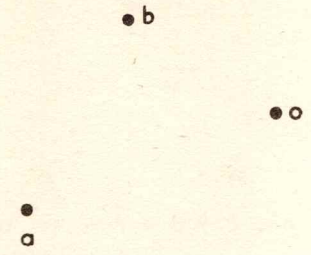
9. Busca dos puntos a, b tales que $a - b \neq b - a$.
Habrás mostrado de este modo que la resta *no es conmutativa.*

10. Busca tres puntos a, b, c tales que $a - (b - c) \neq (a - b) - c$.
Habrás probado que la resta *no es asociativa.*

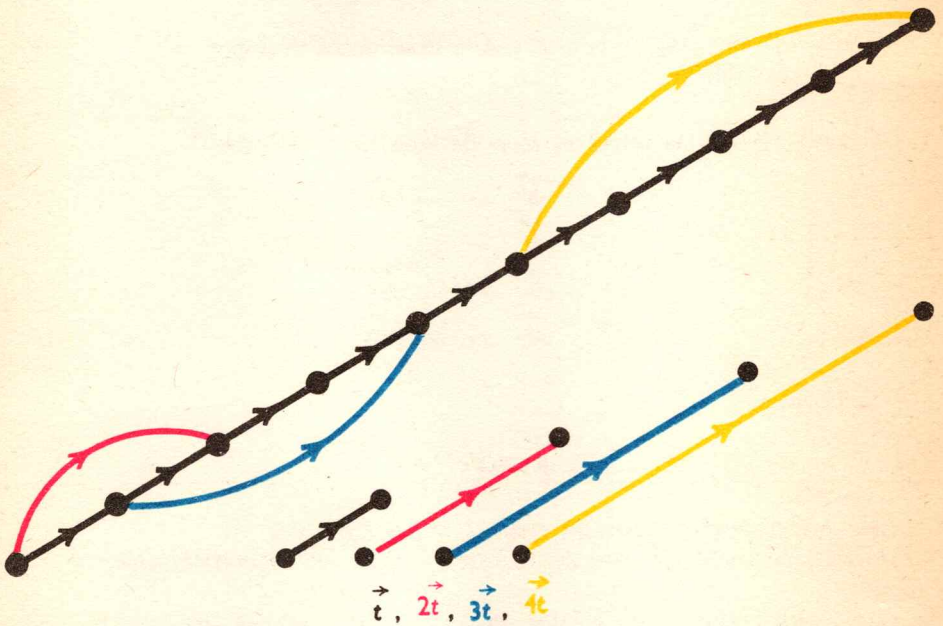
11. Para todo $a \in \Pi$; $a - a = o$.

12. La solución de la ecuación $a + x = b$ es $x = b - a$. ¿Cuál es la solución de $a = b + y$?

13. Tienes los puntos a, b. ¿Quieres construir x, $y \in \Pi$ tales que $x - a = b$, $a - y = b$?



6 — MULTIPLICACIÓN DE VECTORES POR ENTEROS RACIONALES



Este dibujo ilustra la convención

$$2\vec{t} = \vec{t} + \vec{t}$$
$$3\vec{t} = \vec{t} + \vec{t} + \vec{t}$$

Para todo entero natural n se **define**

$$n\vec{t} = \underbrace{\vec{t} + \vec{t} + \ldots + \vec{t}}_{n \text{ términos}}$$

En particular,

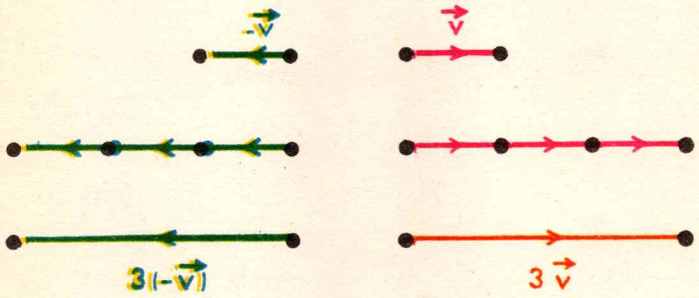
$$1.\ \vec{t} = \vec{t}$$

$$0.\ \vec{t} = \vec{0}$$

En esta fórmula, 0 designa el número natural cero y $\vec{0}$ designa el **vector nulo** (o *la transformación idéntica*).

Aquí tienes un vector $\vec{v}$.

Construye $-\vec{v}$, $3\vec{v}$, $3(-\vec{v})$



Se ve claramente que

$$-(3\vec{v}) = 3(-\vec{v})$$

Vamos a convenir que

$$(-3)\ \vec{v} = -(3\vec{v}) = 3(-\vec{v})$$

Para todo natural n y todo vector $\vec{v}$,

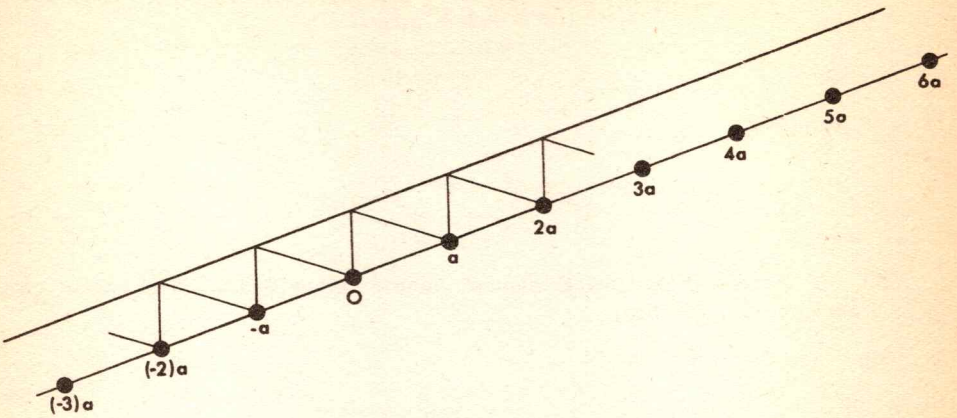
$$-(n\vec{v}) = n(-\vec{v})$$

y convendremos que

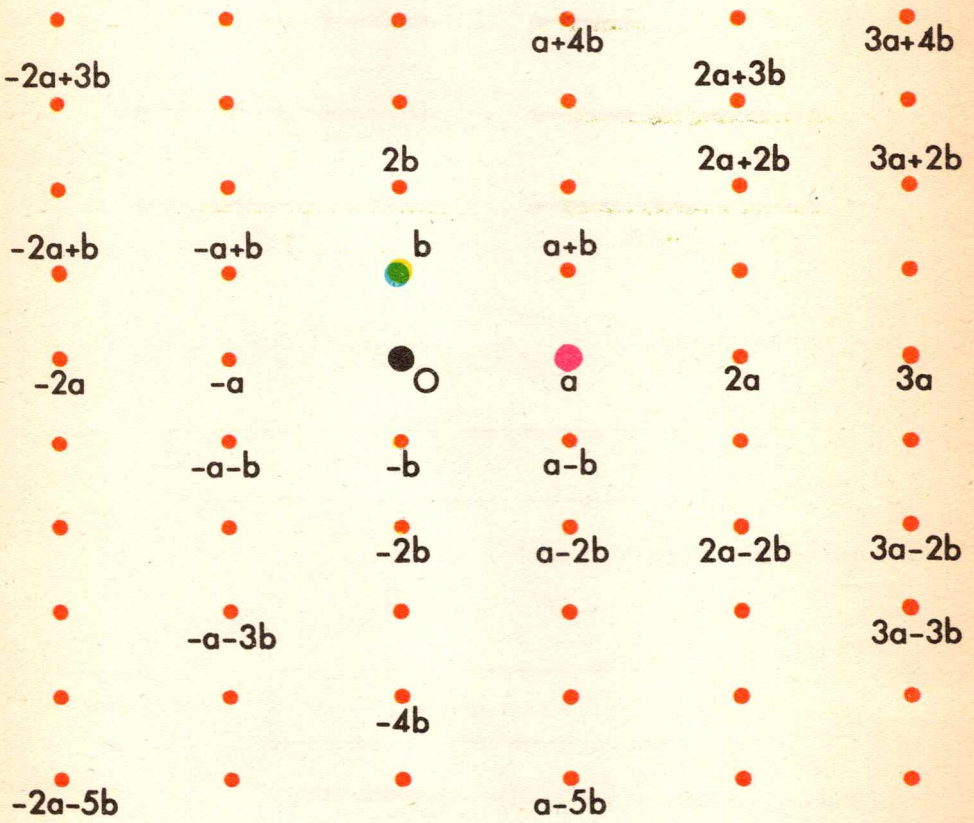
$$(-n)\vec{v} = -(n\vec{v}) = n(-\vec{v})$$

Se tiene en particular $-\vec{v} = (-1)\vec{v}$

Aplicamos estas convenciones en $\Pi_{o,}$ $+$.



En $\Pi_{o,}$ $+$.



7 — PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR UN ENTERO RACIONAL

EJERCICIOS

En Π_o, $+$, comenta y justifica.
(Las letras designan puntos)

1. $3 \cdot (a + b) = (a + b) + (a + b) + (a + b)$
$= (a + a + a) + (b + b + b)$
$= 3a + 3b$

2. $5(b + c) = 5b + 5c$

3. $-4(a + b) = 4(-(a + b))$
$= 4((-a) + (-b))$
$= 4(-a) + 4(-b)$
$= (-4)a + (-4)b$
$= -4a - 4b$

4. $-11(u + v) = -11u - 11v$

5. $4(b - c) = 4b - 4c$

6. $3(2a) = 2a + 2a + 2a$
$= (a + a) + (a + a) + (a + a)$
$= (3 \cdot 2)a$
$= 6a$

7. $2a + 3a = (a + a) + (a + a + a)$
$= (2 + 3)a$

8. $2a + 5a = 7a$

9. $(5 + 2)a = 5a + 2a$

PROPOSICIÓN 1 — *En* Π_o, $+$:

Para todo $a, b \in \mathbf{Z}$ *y todo* $x, y \in \Pi$,

(1) $a\,(x + y) = a\,x + a\,y$ } DISTRIBUTIVIDAD

(2) $(a + b)\,x = a\,x + b\,x$ }

(3) $a\,(b\,x) = (a \cdot b)\,x$ ASOCIATIVIDAD MIXTA

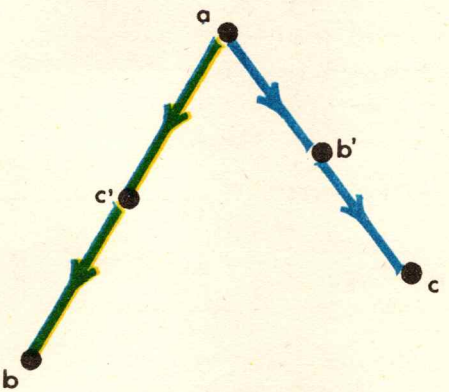
Si $a, b, c \in Z$ y $x, y, z \in \Pi$
entonces en Π_o, $+$:

10. $(a + b)\,(x + y) = ax + ay + bx + by$.

11.. $(a + 2\,b - c)\,(x - y + 2\,z) = \ldots\ldots$

8 — APLICACIONES DEL CÁLCULO VECTORIAL

1. El cálculo vectorial permite demostrar de manera casi automática la proposición 5 del capítulo 21 (pág. 356).



Nos dicen que $\vec{ac'} = \vec{c'b}$ y $\vec{ab'} = \vec{b'c}$

Luego, $\vec{bc'} = \vec{c'a}$ y $\vec{ba} = \vec{bc'} + \vec{c'a} = \vec{c'a} + \vec{c'a} = 2\,\vec{c'a}$

$\vec{ac} = \vec{ab'} + \vec{b'c} = \vec{ab'} + \vec{ab'} = 2\,\vec{ab'}$

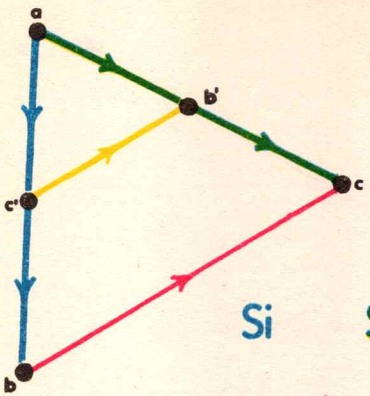
De aquí, $\vec{bc} = \vec{ba} + \vec{ac} = 2\,\vec{c'a} + 2\,\vec{ab'} = 2\,(\vec{c'a} + \vec{ab'}) = 2\,\vec{c'b'}$

Así, $\vec{bc} = 2\,\vec{c'b'}$

¡Justifica cada una de las etapas de este cálculo!

Nuestro trabajo se ve compensado por un resultado más preciso que el encerrado en la proposición 5 del capítulo 21. Enunciemos, pues:

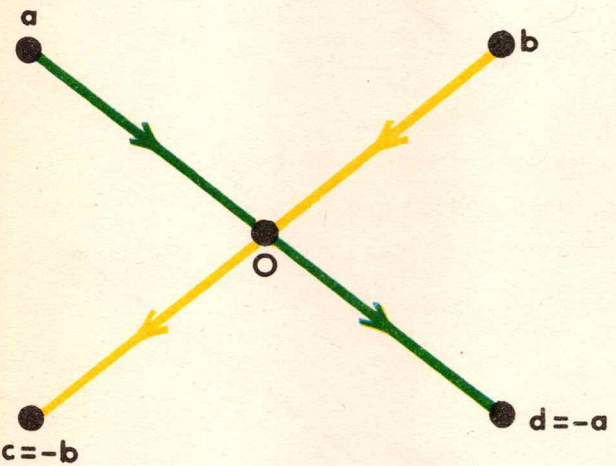
PROPOSICIÓN 2.



Entonces $\overrightarrow{bc} = 2\,\overrightarrow{c'b'}$

2. Demuestra por el cálculo la proposición:
Si las diagonales de un paralelogramo tienen el mismo punto medio, ese cuadrilátero es un paralelogramo (ver capítulo 21, proposiciones 10 y 12).

Llamemos o al punto medio común.
En consecuencia,



y

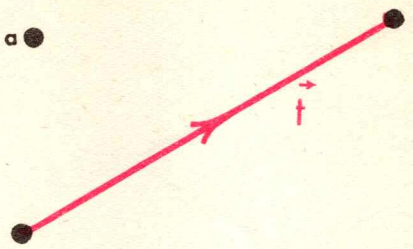
$$\overrightarrow{cd} = d - c = d + (-c) = -a + b = b - a = \overrightarrow{ab}$$

l.q.q.d.

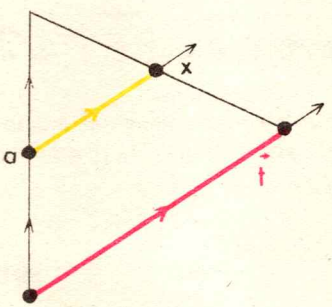
Justifica cada una de estas igualdades.

EJERCICIOS

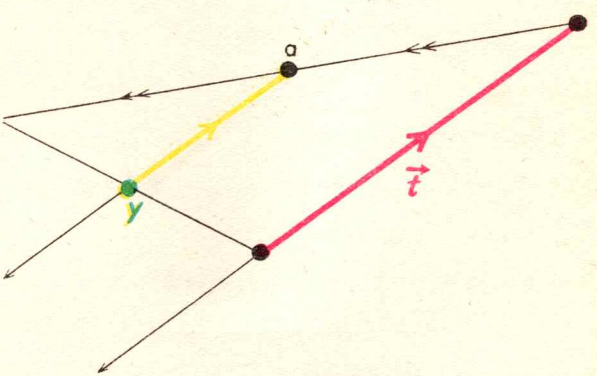
1. He aquí una traslación o un vector $\vec{t}$ y un punto $a \in \Pi$.

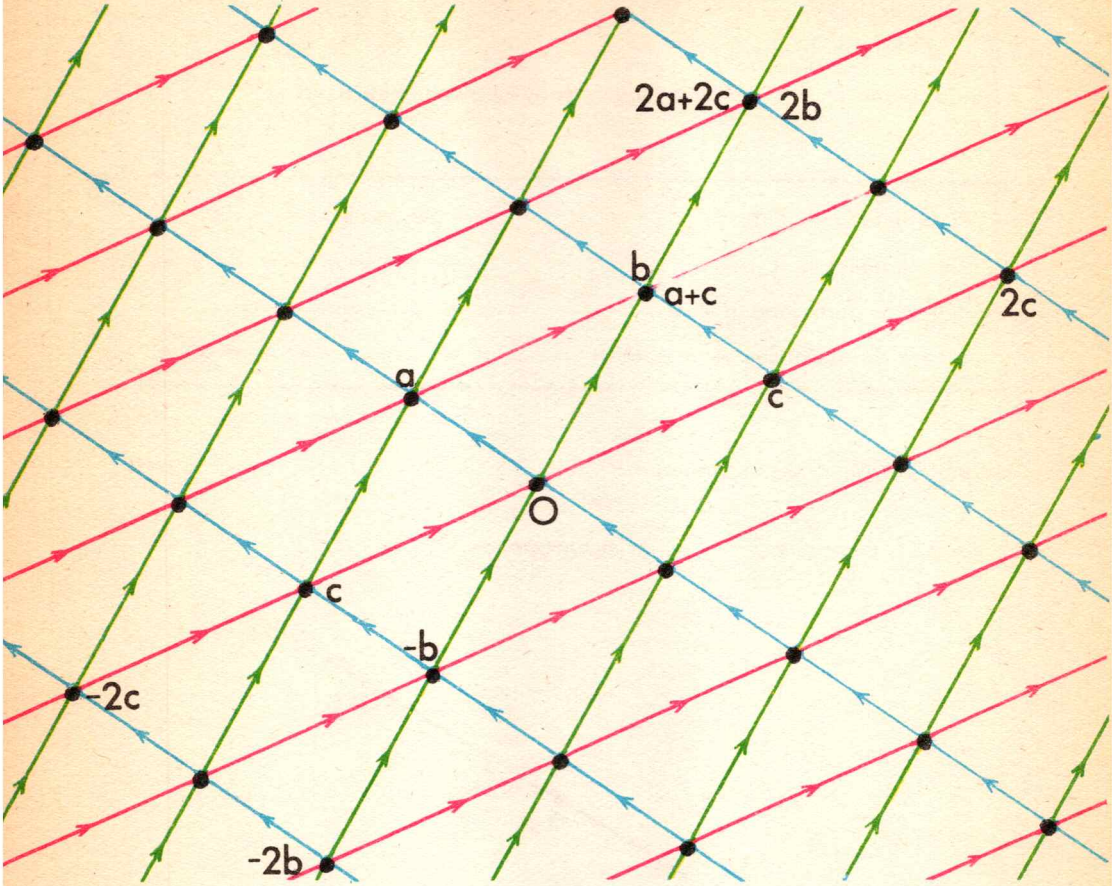


¿Quieres construir x tal que $\vec{t} = 2\,\vec{ax}$?



2. Nos dan una traslación $\vec{t}$ y un punto $a \in \Pi$.
¿Quieres construir $y \in \Pi$ tal que $\vec{t} = 2\,\vec{ya}$.





Mira atentamente este dibujo.

Tenemos las fórmulas $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$.

Para todo $x, y \in Z$: $x\,\boldsymbol{a} + y\,\boldsymbol{b} = (x + y)\,\boldsymbol{a} + y\,\boldsymbol{c} = (x + y)\,\boldsymbol{b} - x\,\boldsymbol{c}$.

Completa y justifica las fórmulas que siguen:

Para todo $y, z \in Z$: $y\,\boldsymbol{b} + z\,\boldsymbol{c} =$

Para todo $x, z \in Z$: $x\,\boldsymbol{a} + z\,\boldsymbol{c} =$

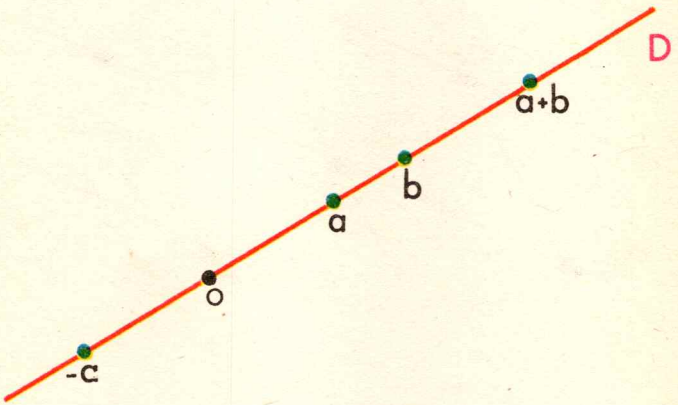
9 — SUBGRUPOS

En el plano Π_o, $+$ tracemos una recta D que contenga a o.

Para todo $a, b \in D$:	$a + b = b + a \in D$.
Para todo $a, b, c \in D$:	$(a + b) + c = a + (b + c)$.
$o \in D$ y para todo $d \in D$:	$o + d = d + o = d$.
Si $a \in D$, **entonces** $-a \in D$ y	$a - a = -a + a = o$.

Como ves, D, $+$ es un *grupo*.

Vamos a decir que D, $+$ es un **subgrupo** de Π_o, $+$.



DEFINICIÓN 2 — *Toda parte P de* Π_o, $+$ *tal que P,* $+$, *sea un grupo se llama* ***subgrupo*** *de* Π_o, $+$.

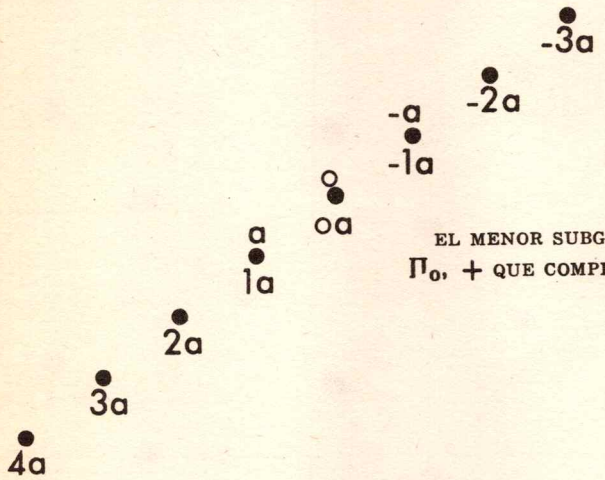
Así, $\{o\}$ es un subgrupo de Π_o, $+$. (es el subgrupo **nulo**).
Π_o mismo es un subgrupo de Π_o, $+$ (es el subgrupo impropio).
Todo subgupo de Π_o, $+$ *contiene a* o.

EJERCICIOS

1. Para todo $a \in \Pi_o$,

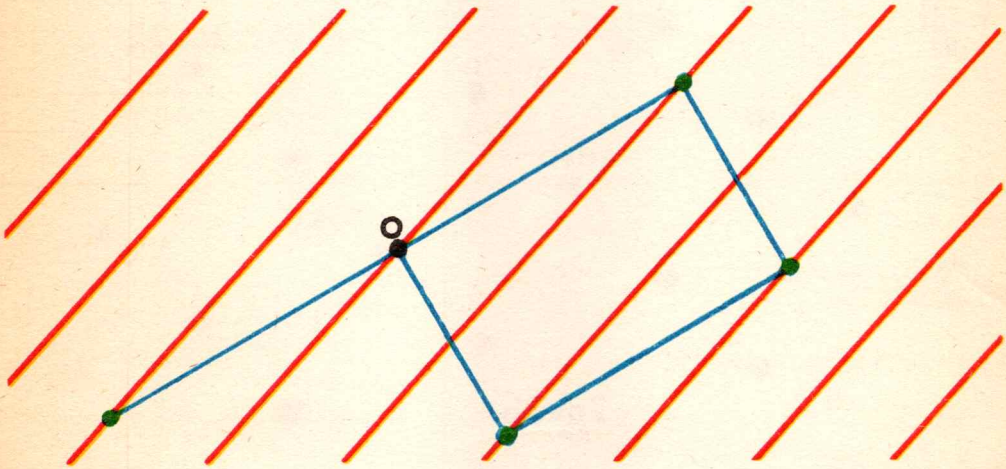
$$Za = \{ za \mid z \in Z \} = \{ o, a, -a, 2a, -2a, \dots \}$$

es un subgrupo de Π_o, $+$.
Es el menor subgrupo de Π_o, $+$ que contiene a a.



EL MENOR SUBGRUPO DE Π_o, $+$ QUE COMPRENDE a.

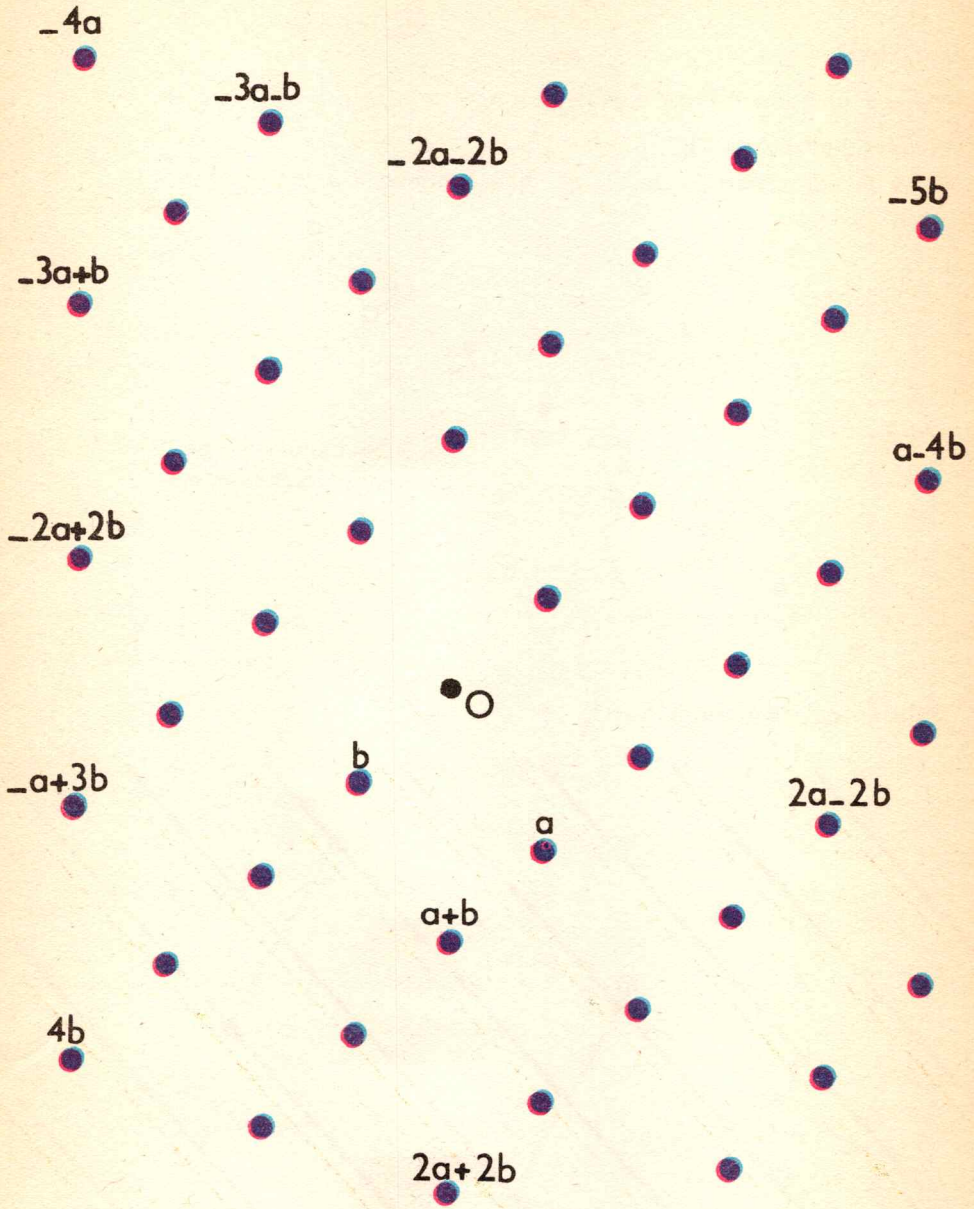
2. Éste es otro subgrupo de Π_o, $+$



UN SUBGRUPO DE Π_o, $+$

Justifica.

3. Si $a, b \in \Pi_o$, entonces $\{ xa + yb \mid x, y \in Z \}$ es un subgrupo de $\Pi_o, +$.



UN SUBGRUPO DE $\Pi_o, +$

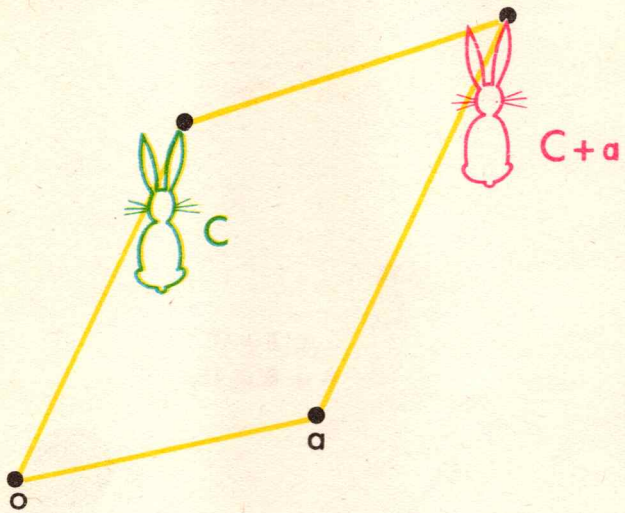
10 — ADICIÓN DE PARTES DE Π_o, +

Si $x \in \Pi$ y $A, B \subset \Pi$ estableceremos que, en Π_o, +,

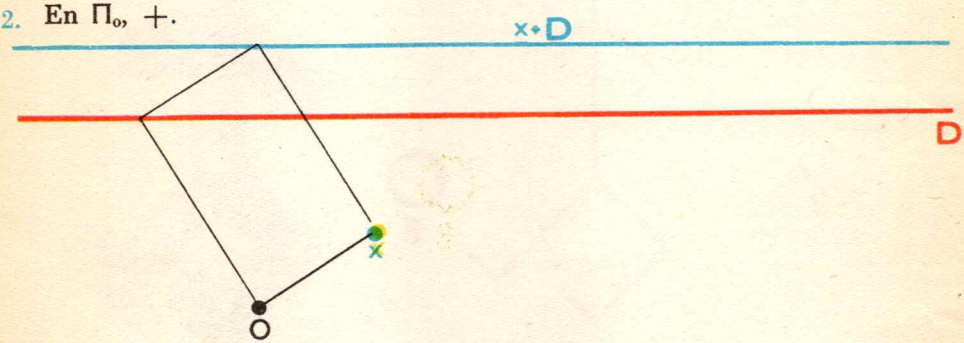
$$A + B = \{ a + b \mid a \in A,\ b \in B \}$$
$$x + A = \{ x + a \mid a \in A \}$$
$$-A = \{ -a \mid a \in A \}$$
$$A - B = A + (-B) = \{ a - b \mid a \in A,\ b \in B \}$$

EJERCICIOS

1. En Π_o, + dibuja un "conjunto conejo" C y marca un punto a. $C + a$ es, entonces, la imagen del conejo C por la traslación $\overrightarrow{oa}$.

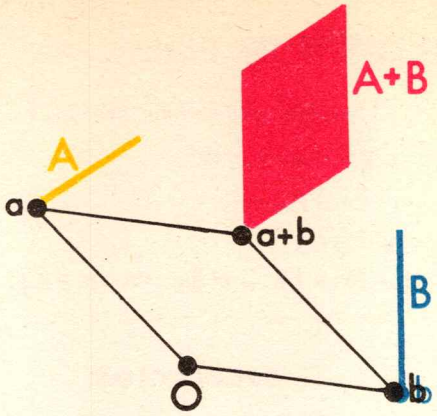


2. En Π_o, +.

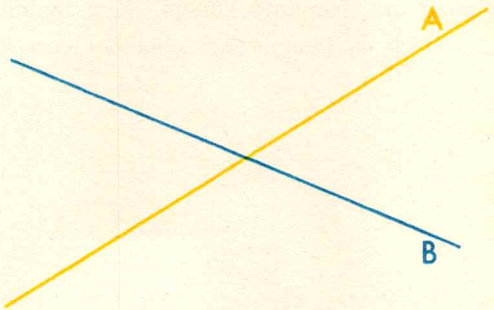


$x + D$ es la imagen de la recta D por la traslación $\overrightarrow{ox}$.

3. En Π_o, $+$.

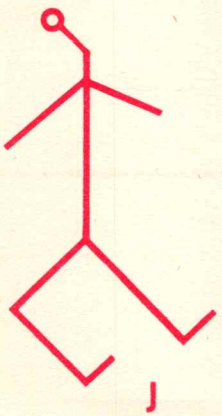


4. En Π_o, $+$.

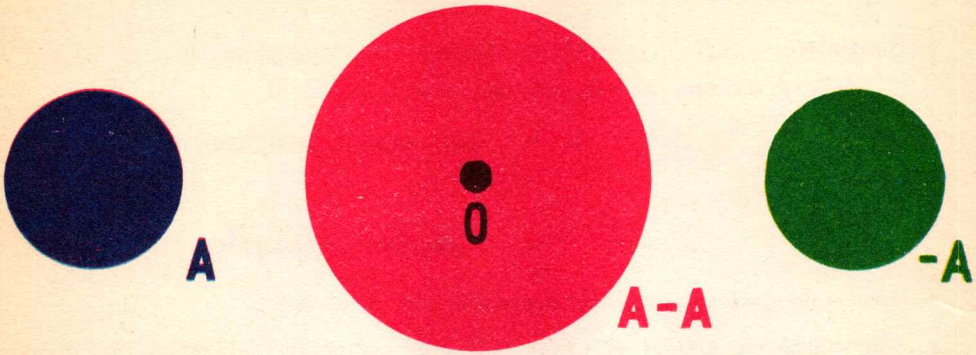


$A, B \in \mathcal{D}$
$A + B = \Pi_o$

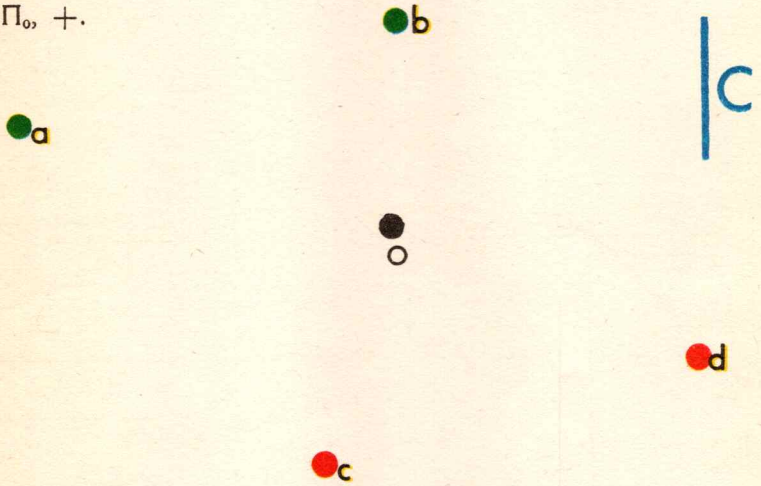
5.



6.



7. En Π_o, +.



$A = \{a, b\}$ $B = \{c, d\}$

Construye $A + B$, $A + C$, $B + C$, $A + B + C$, $A - B + C$

11 — PROYECCIÓN DE VECTORES

Designemos por p la proyección paralela a la recta P del plano Π, sobre la recta D.

Sabes (cap. 21, teor. 2, pág. 363) que si $a, b, c, d \in \Pi$

$$(a, b) \uparrow (c, d) \Rightarrow (p(a), p(b)) \uparrow (p(c), p(d))$$

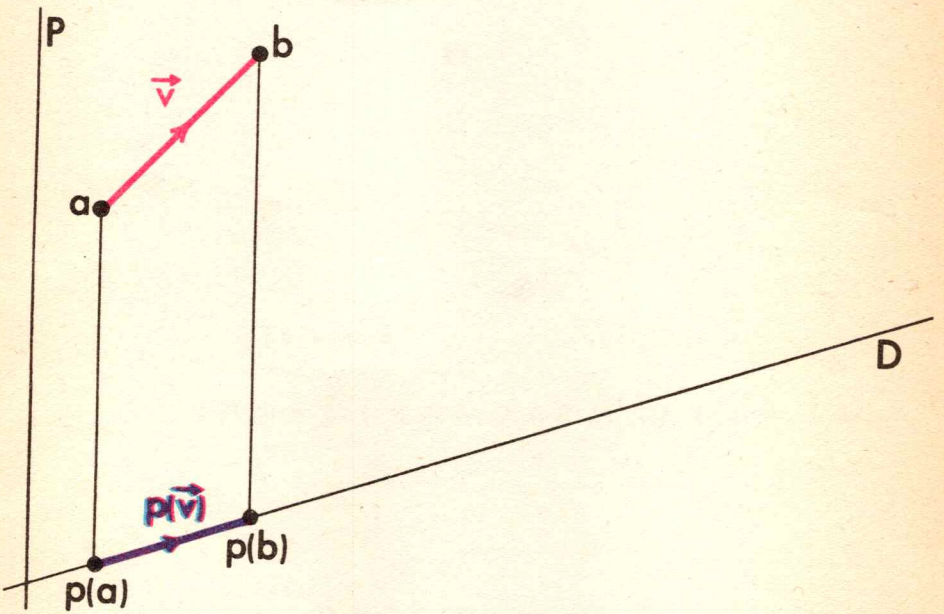
En otros términos:

$$\vec{ab} = \vec{cd} \Rightarrow \overrightarrow{p(a)\,p(b)} = \overrightarrow{p(c)\,p(d)}$$

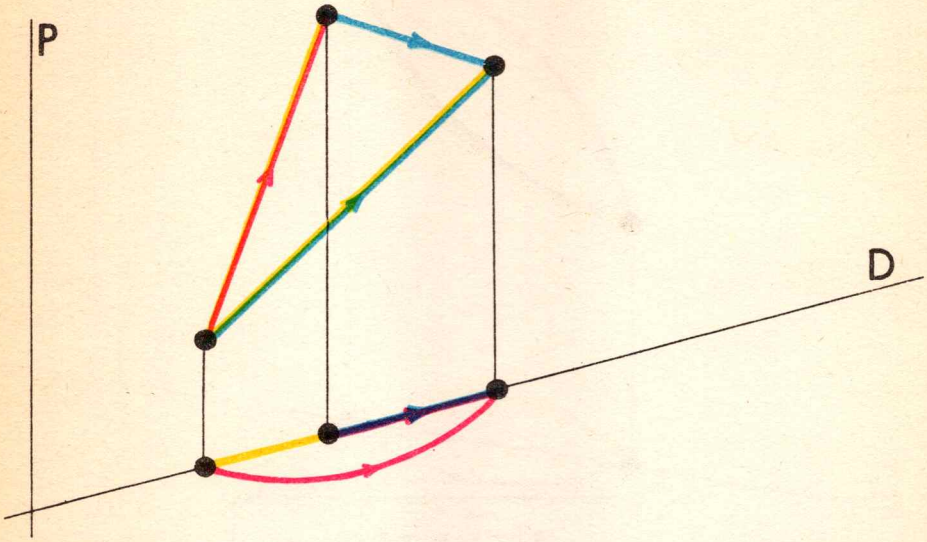
Hemos llamado a $(p(a), p(b))$ proyección de (a, b) por p.

Igualmente llamaremos al vector $\overrightarrow{p(a)\,p(b)}$ proyección del vector ab por p y escribiremos

$$p(\vec{ab}) = \overrightarrow{p(a)\,p(b)}$$



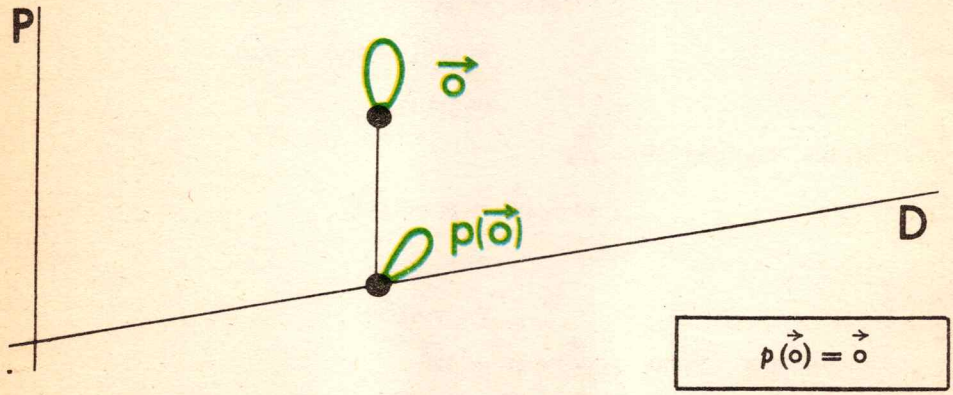
Los dibujos siguientes te iniciarán en el cálculo de proyecciones de vectores.



$$p(\vec{r} + \vec{s}) = p(\vec{r}) + p(\vec{s})$$

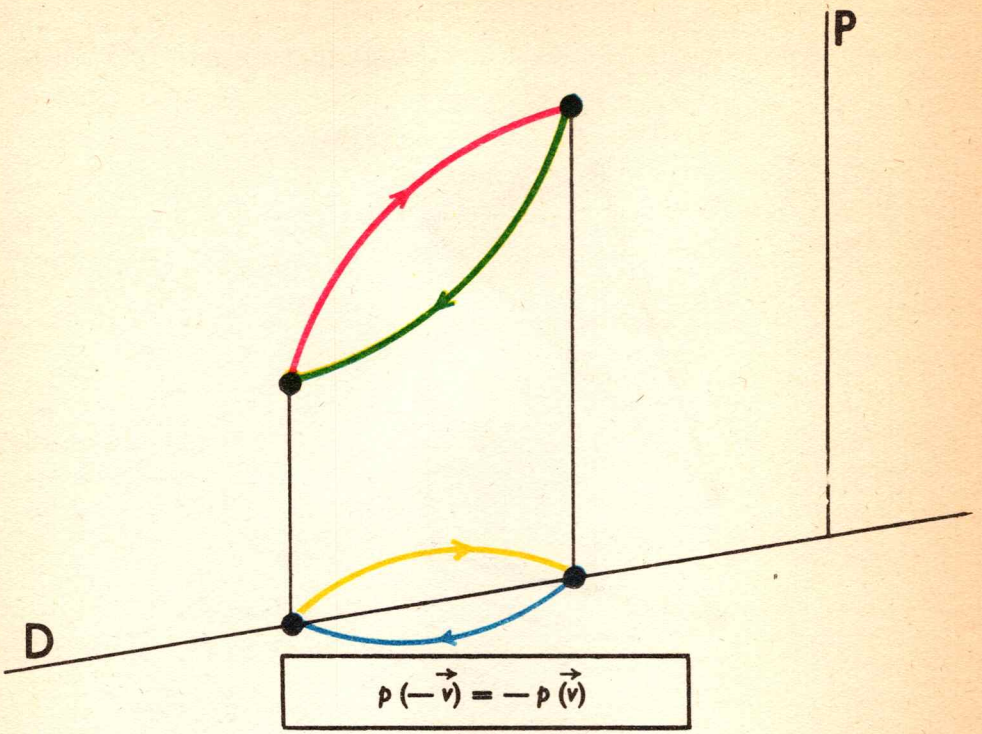
La proyección paralela de una suma de vectores es igual a la suma de las proyecciones de esos vectores.

Toda proyección paralela respeta la adición vectorial.



$$p(\vec{o}) = \vec{o}$$

La proyección del vector nulo es el vector nulo.



— ¿Qué puedes decir ahora de $p(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$?

— $p(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = p(\vec{u}) + p(\vec{v}) + p(\vec{w})$

— Calcula $p(3\vec{u})$

— $p(3\vec{u}) = p(\vec{u} + \vec{u} + \vec{u})$

$= p(\vec{u}) + p(\vec{u}) + p(\vec{u})$

$= 3p(\vec{u})$

— Calcula, también $p(-4\vec{v})$

— $p(-4\vec{v}) = p(-(4\vec{v}))$

$= -p(4\vec{v})$

$= -4p(\vec{v})$

— Calcula, por último, $p(3\vec{u} - 4\vec{v} + 7\vec{w})$

— $p(3\vec{u} - 4\vec{v} + 7\vec{w}) = 3p(\vec{u}) - 4p(\vec{v}) + 7p(\vec{w})$

PROPOSICIÓN 3 — **Si** *a, b, . . ., c designan enteros racionales,*

$\vec{u}, \vec{v}, \ldots, \vec{w}$ *designan vectores,*

p designa una proyección paralela del plano Π *sobre una recta,*

entonces,

$$p(a\vec{u} + b\vec{v} + \ldots + c\vec{w}) = ap(\vec{u}) + bp(\vec{v}) + \ldots + cp(\vec{w})$$

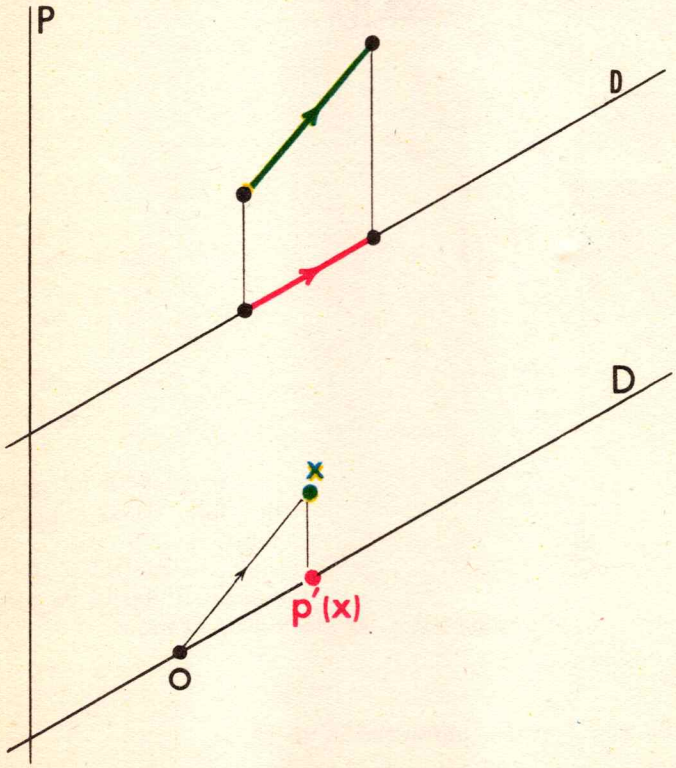
EJERCICIO

Sabes (cap. 21, teor. 2, pág. 363) que las proyecciones de pares ordenados equipolentes sobre rectas paralelas son equipolentes.

Sea p la proyección $\Pi \to$ D paralela a P.

Sea D' la paralela a D que contiene a o y p' la proyección $\Pi \to$ D' paralela a P.

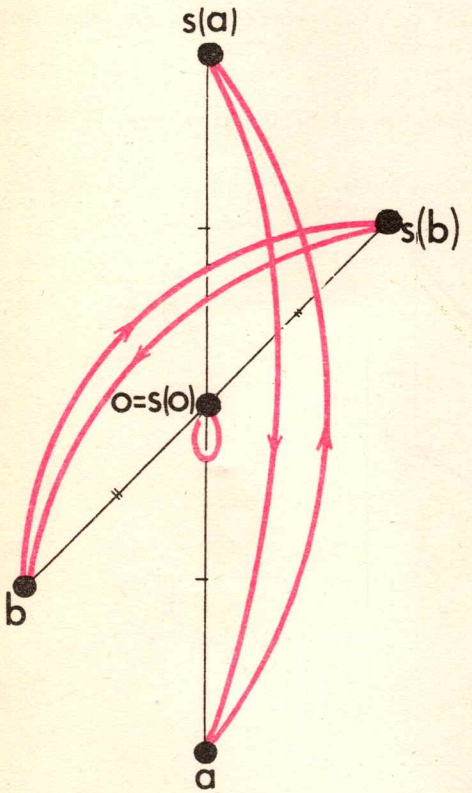
Si el punto x representa al vector v, el punto $p'(\vec{x})$ representa al vector $p(\vec{v})$.



23

Simetrías centrales

1 — SIMETRÍAS CENTRALES



SIMETRÍA s_o DE CENTRO o

$\overrightarrow{ao} = \overrightarrow{o\ s(a)}$

$\overrightarrow{bo} = \overrightarrow{o\ s(b)}$

GRÁFICO 165

El dibujo de la izquierda muestra que todo punto $o \in \Pi$ define una *transformación* en Π que se llama **simetría central** o, de manera más precisa, **simetría de centro o**.

Resulta cómodo representar por s_o la simetría de centro o.

— Da vuelta las flechas de s_o.

— $s_o^{-1} = s_o$.

— Esto prueba que s_o es una **permutación** en Π.

— En efecto, s_o es una relación tal que s_o y s_o^{-1} son transformaciones en Π.

EJERCICIOS

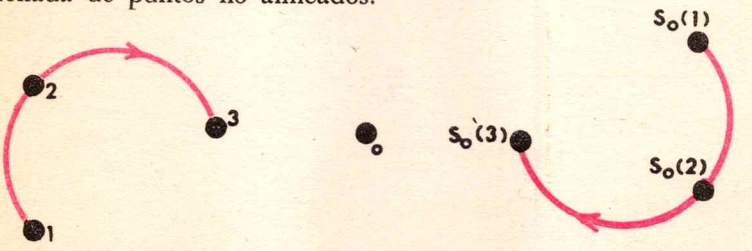
1. Dibuja en el plano Π un gran 3 y marca un punto o.

Dibuja en verde la imagen de 3 por la simetría de centro o.
¿La imagen verde es también un 3? Explica.

¿Cuál es la imagen del 3 anaranjado por la transformación idéntica y por la transformación constante o?

2. Construye el simétrico del conjunto siguiente respecto del punto *c*.

3. Comprueba que toda simetría central conserva el sentido de una terna ordenada de puntos no alineados.

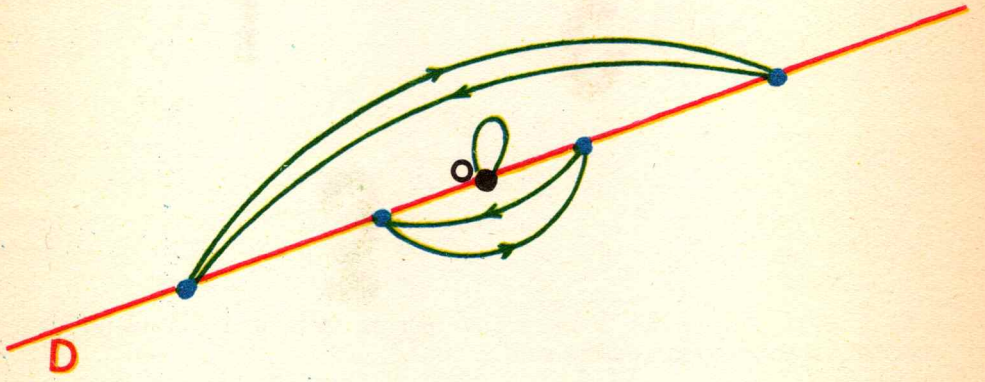


2 — IMAGEN DE UNA RECTA POR UNA SIMETRÍA CENTRAL

Sabemos que

$$s_o(a) = b \iff b = s_o(a)$$

En tales casos diremos que a y b son simétricos (respecto de o).
Tratemos de ver cuál es la imagen s_oD de una recta D.
Si o ε D, resulta claro que $s_oD = D$.



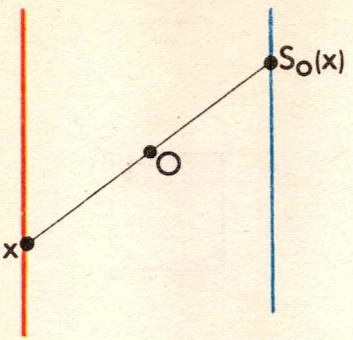
$s_oD = D$

No olvides que toda recta es paralela a sí misma.
Luego, en este caso $s_oD \parallel D$.
Veamos ahora el caso

Elige un punto $x \in D$.

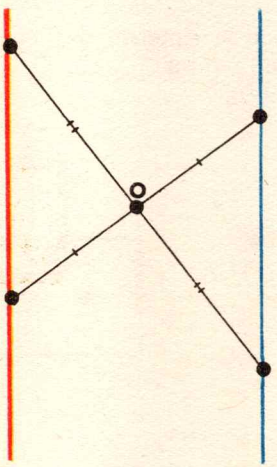
Construye su imagen $s_o(x)$.

Traza la paralela P a D que contiene a $s_o(x)$.



Digo que $P = s_oD$.

En efecto, toda recta que contiene a **o** y no paralela a D, corta a D y a P en puntos simétricos respecto de **o**.



(Cap. 21, § 6, pág. 366)

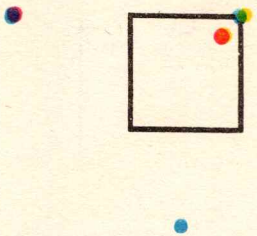
La imagen de todo punto de D pertenece a P.
Todo punto de P es la imagen de un punto de D
} luego, $s_oD = P$.

Queda justificada, entonces, la

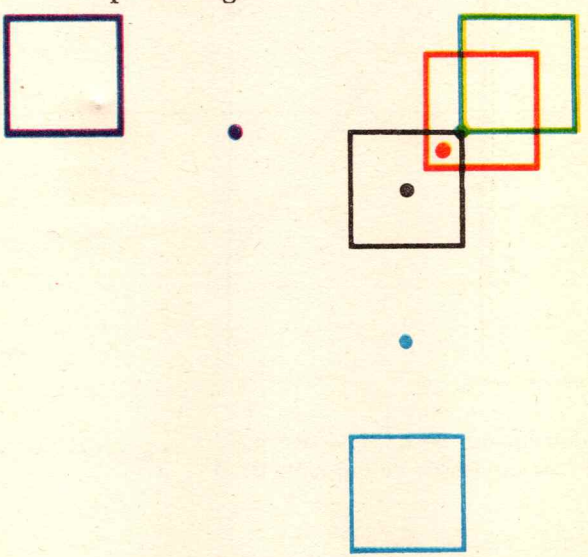
PROPOSICIÓN 1 — *La imagen de una recta por una simetría central es una recta paralela.*

EJERCICIOS

1. Se tiene $s \circ s = 1_{\pi}$ para toda simetría central s.
2. Aquí tienes un borde de cuadrado en negro.

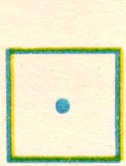


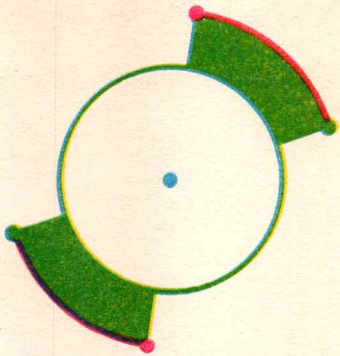
Dibuja en azul su imagen por la simetría de centro azul. Haz lo mismo tomando como centro los otros puntos.
¿Dónde marcar el punto negro?



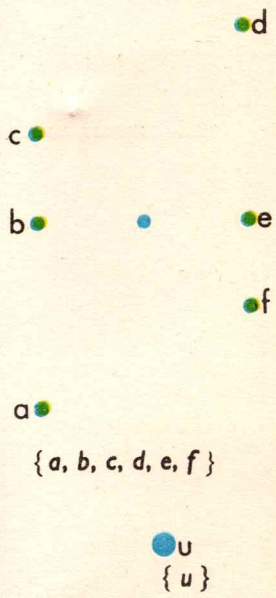
El borde del cuadrado negro es su propia imagen por la simetría de centro negro.

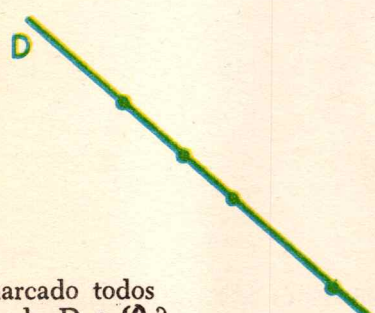
¿Quieres dibujar conjuntos que sean su propia imagen por cierta simetría central? El centro de una simetría central tal se llama centro (de simetría) de ese conjunto.
Aquí mostramos algunos ejemplos. Presenta muchos más.





El *centro de simetría* de un par es el punto que hemos llamado ya *centro* del par.





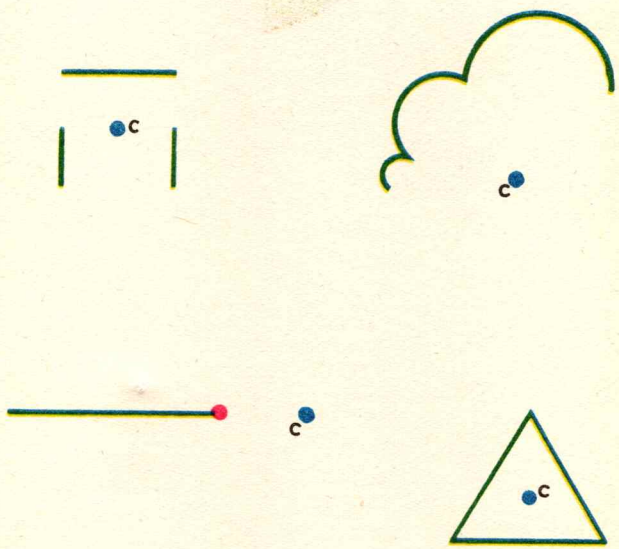
¿Hemos marcado todos los centros de D ε 𝔇?

4. Un triángulo equilátero ¿admite un centro (de simetría)?

5. ¿Cuáles son los polígonos regulares que admiten un centro (de simetría)?

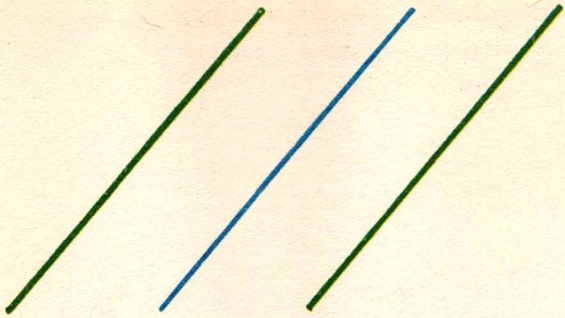
6. Un paralelogramo cerrado y su borde tienen el mismo centro de simetría: el punto medio (o centro) de las diagonales.

7. ¿Cuál es el más pequeño conjunto de centro c que contiene a **E** en las situaciones siguientes?



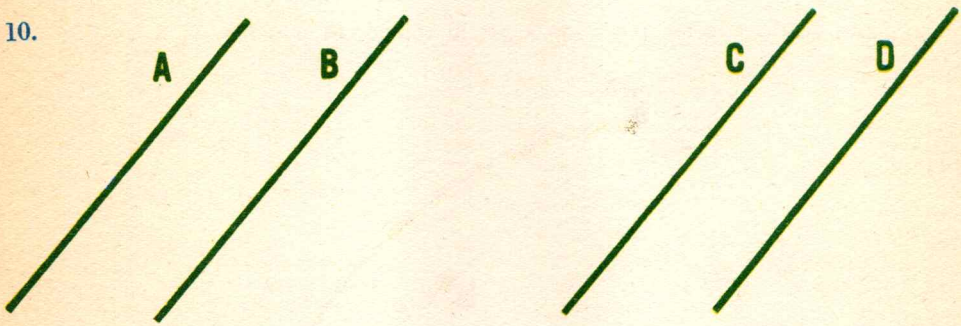
8. Para todo $c \in \Pi$ y todo $E \subset \Pi$ $E \cup s_c \cdot E$ es el más pequeño conjunto de centro c que contiene a E.

9. ¿Cuál es el conjunto de los centros (de simetría) de la unión de dos rectas paralelas?



Justifica tu respuesta.

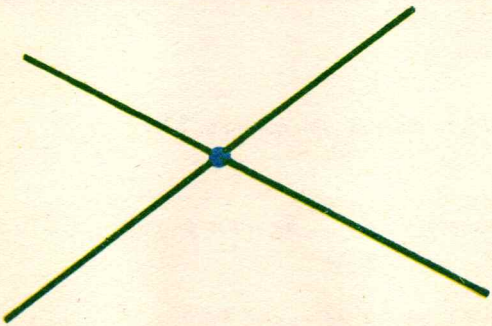
10.



A, B, C, D $\in$ 𝒟

¿Conjunto de los centros de simetría de $A \cup B \cup C \cup D$?

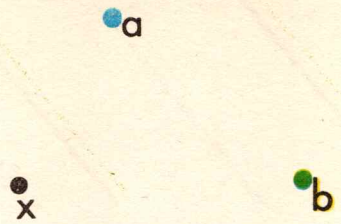
11. ¿Cuál es el centro de simetría de la unión de dos rectas secantes?



12. Dos rectas paralelas son imagen una de la otra por una simetría central.

3 — SIMETRÍAS CENTRALES Y TRASLACIONES

Se tiene dos puntas a, b. Cada uno de ellos define una simetría central s_a, s_b. Marca un punto x cualquiera en el plano.



¿Quieres construir la imagen x' de x por la compuesta s_b o s_a?

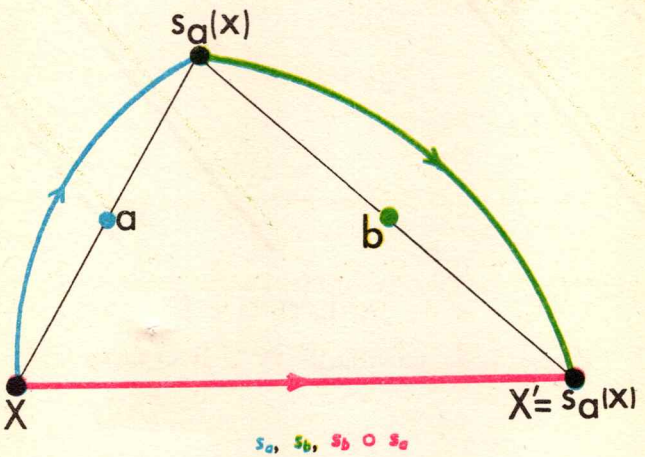


GRÁFICO 166

— Compara $\overrightarrow{x\,x'}$ y $\overrightarrow{a\,b}$.

— ...

— Ayúdate con la proposición 2 del capítulo 22.

— $\overrightarrow{x\,x'} = 2\,\overrightarrow{a\,b}$.

— Construye las imágenes y', z', ... de otros puntos y, z, ... por s_b o s_a. ¿Qué va a ocurrir?

— Se tendrá $\overrightarrow{x\,x'} = \overrightarrow{y\,y'} = \overrightarrow{z\,z'} = \ldots = 2\,a\,b$.

Luego, como ves,

$$s_b \circ s_a = 2\overrightarrow{ab}$$

Recordemos este primer resultado.

PROPOSICIÓN 2 — *La compuesta de dos simetrías centrales es una traslación:*

Para todo $a, b \in \Pi$: $\quad s_b \circ s_a = 2\overrightarrow{ab}$

Ahora resulta fácil probar la

PROPOSICIÓN 3 — *Toda traslación es la compuesta de dos simetrías centrales. Más todavía, para toda traslación* $\vec{t}$ *y todo* $a \in \Pi$, *existen* $x, y \in \Pi$ *tales que*

$$t = s_x \circ s_a = s_a \circ s_y$$

Sabemos que

$$s_x \circ s_a = 2\overrightarrow{ax} \qquad s_a \circ s_y = 2\overrightarrow{ya}$$

Todo se reduce, pues, a hallar puntos x, y tales que

$$2\overrightarrow{ax} = \vec{t} \qquad 2\overrightarrow{ya} = \vec{t}$$

y esto sabemos hacerlo. (Cap. 22, § 8, ej. 1 y 2, pág. 410).

PROPOSICIÓN 4 — *Para todo*

$a, b, c \in \Pi$: *existen* $x, y \in \Pi$ *tales que*

$$s_y \circ s_c = s_b \circ s_a = s_c \circ s_x$$

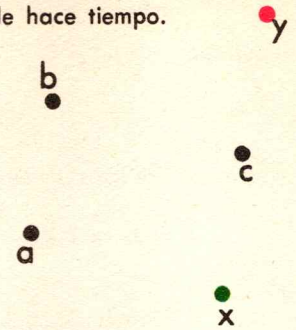
Cualesquiera que sean los puntos x, y la proposición 2 nos asegura que:

$$s_y \circ s_c = 2\overrightarrow{cy}, \qquad s_b \circ s_a = 2\overrightarrow{ab}, \qquad s_c \circ s_x = 2\overrightarrow{xc}$$

Debemos, pues, hallar x, y tales que

$$\overrightarrow{cy} = \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{xc}$$

cosa que sabemos hacer desde hace tiempo.



Hemos resuelto un problema que concierne a las simetrías centrales sin dibujar ninguna simetría central. ¿No te parece divertido?

PROPOSICIÓN 5 — *La compuesta de tres simetrías centrales es una simetría central*
En otros términos: $a, b\ c \in \Pi \quad \Rightarrow \quad s_c \circ s_b \circ s_a$ *es una simetría central.*

DEMOSTRACIÓN: Debemos *calcular* $s_c \circ s_b \circ s_a$.
En virtud de la proposición 4 existe $x \in \Pi$ tal que

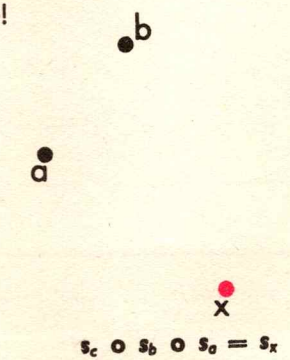
$$s_b \circ s_a = s_c \circ s_x$$

Luego (si designamos por 1_Π la transformación idéntica en Π),

$$\begin{aligned} s_c \circ s_b \circ s_a &= s_c \circ (s_c \circ s_x) \\ &= (s_c \circ s_c) \circ s_x \\ &= 1_\Pi \circ s_x \\ &= s_x \end{aligned}$$

l.q.q.d.

¡Acabamos de resolver un problema de geometría sin hacer dibujos!
¿La situación no se vuelve cada vez más divertida?
¡Haz un dibujo si quieres!



$s_c \circ s_b \circ s_a = s_x$

PROPOSICIÓN 6 — *La compuesta de un número par de simetrías centrales es una traslación.*

La compuesta de un número impar de simetrías centrales es una simetría central.

En particular, la compuesta de dos traslaciones es una traslación y la compuesta de una traslación y de una simetría central (o de una simetría central y de una traslación) es una simetría central.

DEMOSTRACIÓN: Sean simetrías centrales $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, \ldots$

s_1 es una *simetría central*.

$s_2 \circ s_1$ es una *traslación* (prop. 2).

$s_3 \circ s_2 \circ s_1$ es una *simetría central* (prop. 5). Llamémosla s'_3 : $s_3 \circ s_2 \circ s_1 = s'_3$.

$s_4 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1 = s_4 \circ s'_3$ es una *traslación* (prop. 2).

$s_5 \circ s_4 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1 = s_5 \circ s_4 \circ s'_3$ es una *simetría central* (prop. 5). Llamémosla s'_5.

$s_6 \circ s_5 \circ s_4 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1 = s_6 \circ s_5'$ es una *traslación* (prop. 2),

etc. . . .

Como toda traslación es la compuesta de dos simetrías centrales (prop. 3), la compuesta de dos traslaciones es la compuesta de 4 simetrías centrales o sea es una *traslación* (cosa ya sabida hace tiempo).

Del mismo modo, la compuesta de una simetría central y de una traslación (o viceversa) es la compuesta de 3 simetrías centrales; es, por tanto, una *simetría central*.

l.q.q.d.

EJERCICIOS

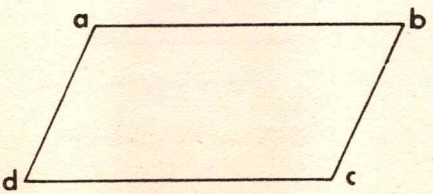
1. Te doy $a, b, c \in \Pi$.
¿ Quieres hallar x, y, z, u, v, w, tales que

$$s_c \circ s_b \circ s_a = s_x$$
$$s_b \circ s_c \circ s_a = s_y$$
$$s_c \circ s_a \circ s_b = s_z$$
$$s_a \circ s_c \circ s_b = s_u$$
$$s_b \circ s_a \circ s_c = s_v$$
$$s_a \circ s_b \circ s_c = s_w ?$$

Deduce relaciones entre estos resultados.

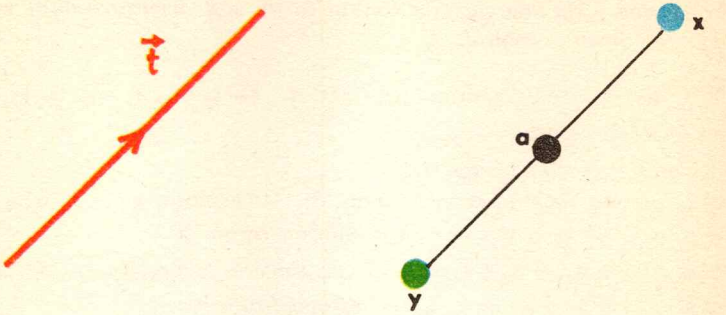
2. Si a, b, c, d son los vértices de un paralelogramo, es verdad que

$$s_d \circ s_c \circ s_b \circ s_a = I_\Pi$$



3. Se tiene una traslación $\vec{t}$ y un punto a.
¿Quieres hallar x, y tales que

$$s_x = \vec{t} \circ s_a, \qquad s_y = s_a \circ \vec{t}.?$$



$\vec{t} = s_a \circ s_a$ luego $\vec{t} \circ s_a = s_a$

4. Si s_1, s_2, s_3 designan 3 simetrías centrales,

$$\boxed{s_1 \circ s_2 \circ s_3 = s_3 \circ s_2 \circ s_1}$$

DEMOSTRACIÓN: Por la proposición 5: $s_1 \circ s_2 \circ s_3$ es una simetría central.
Como toda simetría central es igual a su recíproca,

$$(s_1 \circ s_2 \circ s_3)^{-1} = s_1 \circ s_2 \circ s_3 \qquad (1)$$

Recuerda que si cada una de las letras A, B, C designa una relación,

$$(A \circ B \circ C)^{-1} = C^{-1} \circ B^{-1} \circ A^{-1}$$

Aplica esta fórmula a la compuesta $s_1 \circ s_2 \circ s_3$.

$$(s_1 \circ s_2 \circ s_3)^{-1} = s_3^{-1} \circ s_2^{-1} \circ s_1^{-1}$$

Como $s_1^{-1} = s_1$, $s_2^{-1} = s_2$, $s_3^{-1} = s_3$, obtenemos la fórmula

$$(s_1 \circ s_2 \circ s_3)^{-1} = s_3 \circ s_2 \circ s_1 \qquad (2)$$

De las fórmulas (1) y (2) resulta

$$s_1 \circ s_2 \circ s_3 = s_3 \circ s_2 \circ s_1$$

l. q. q. d.

5. La fórmula demostrada en el ejercicio anterior permite probar por el cálculo la conmutatividad de la composición de traslaciones.
Tenemos que demostrar que si cada una de las letras t_1, t_2 designa una traslación,

$$\boxed{t_1 \circ t_2 = t_2 \circ t_1}$$

En virtud de la proposición 3, existen simetrías centrales

s_1, s_2, s_3, s_4 tales que
$t_1 = s_1 \circ s_2$, $t_2 = s_3 \circ s_4$

Habremos demostrado la fórmula recuadrada más arriba si probamos:

$$s_1 \circ s_2 \circ s_3 \circ s_4 = s_3 \circ s_4 \circ s_1 \circ s_2$$

Recuerda la fórmula del ejercicio 4:

$$s_1 \circ s_2 \circ s_3 = s_3 \circ s_2 \circ s_1$$

Luego,

$$s_1 \circ s_2 \circ s_3 \circ s_4 = s_3 \circ s_2 \circ s_1 \circ s_4 \qquad (1)$$

Aplica la fórmula del ejercicio 4 a la compuesta $s_2 \circ s_1 \circ s_4$

$$s_2 \circ s_1 \circ s_4 = s_4 \circ s_1 \circ s_2 \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) queda

$$s_1 \circ s_2 \circ s_3 \circ s_4 = s_3 \circ s_4 \circ s_1 \circ s_2$$

l. q. q. d.

4 — GRUPO DE LAS SIMETRÍAS CENTRALES Y LAS TRASLACIONES

Relee la proposición 6.

Designo por S el conjunto de las simetrías centrales y las traslaciones.

S es, pues, el conjunto de las transformaciones compuestas de simetrías centrales.

Es decir: $f, g \in S \Rightarrow f \circ g \in S$.

El conjunto S, en consecuencia, está dotado de la ley asociativa $\circ$.

La transformación idéntica 1_π es una traslación y pertenece, pues, a S.

El elemento $1_\pi \in S$ es neutro para $\circ$:

$$\text{para toda } f \in S: 1_\pi \circ f = f = f \circ 1_\pi .$$

Si $f \in S$, entonces f es o bien una simetría central o bien una traslación.

Si f es una simetría central, $f^{-1} = f \in S$.

Si f es una traslación, sabemos (cap. 22, teor. 1, pág. 379) que f^{-1} es una traslación y pertenece, por tanto, a S.

Así, para toda $f \in S$ se tiene $f^{-1} \in S$ y $f \circ f^{-1} = 1_\pi = f^{-1} \circ f$.

En resumen:

1. Para toda $f, g \in S$:	$f \circ g \in S$.
2. Para toda $f, g, h \in S$:	$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
3. $1_\pi \in S$ y para toda $f \in S$:	$f \circ 1_\pi = f = 1_\pi \circ f$.
4. Para toda $f \in S$:	$f^{-1} \in S$ y $f \circ f^{-1} = 1_\pi = f^{-1} \circ f$.

Como ya sabes, el conjunto de estas propiedades se expresa brevemente por el

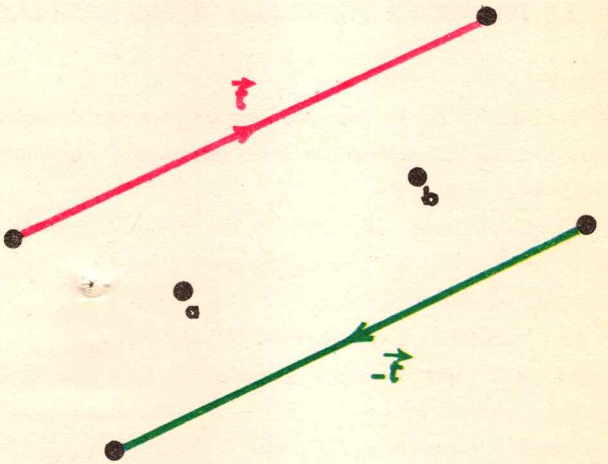
TEOREMA — **El conjunto S de las simetrías centrales y las traslaciones es un grupo para la composición.**

Lacónicamente:

S, o es un grupo.

EJERCICIOS

1. El grupo de las traslaciones y las simetrías centrales no es conmutativo.

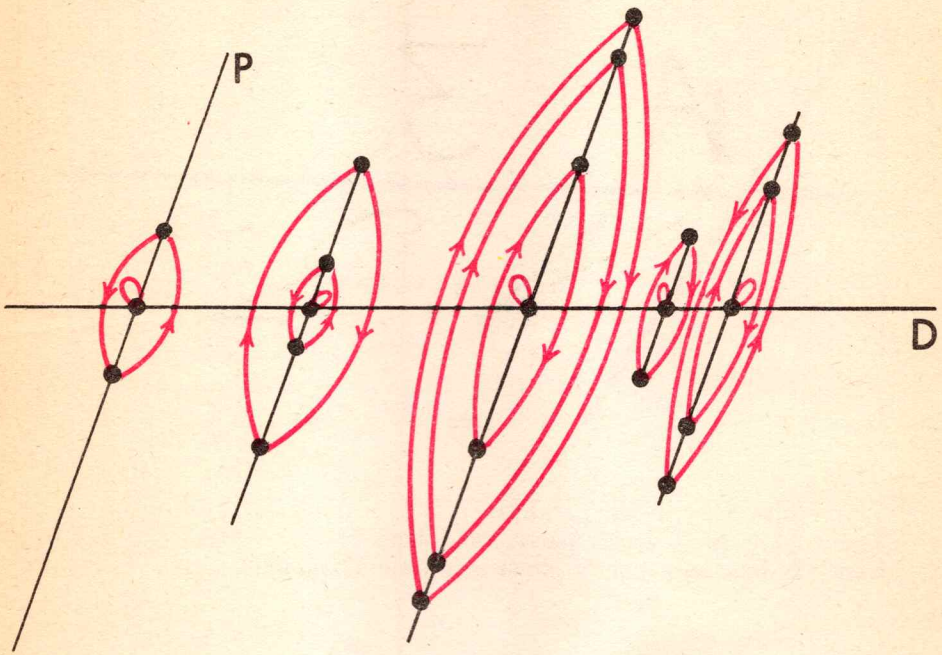


$$s_b \circ s_a = \vec{t} \neq -\vec{t} = s_a \circ s_b$$

2. El grupo de las traslaciones es un subgrupo conmutativo del grupo no conmutativo de las simetrías centrales y las traslaciones.

5 — EJERCICIOS Y COMPLEMENTOS

1. Mira este dibujo. Verás algunas flechas de la transformación llamada **simetría paralela a P de eje D.**



s : SIMETRÍA PARALELA a P DE EJE D ∦ P .

GRÁFICO 167

¿Cuáles son los puntos **fijos** de s, es decir, los puntos que deben aparecer con un lazo?

El eje de s *es el conjunto de sus puntos fijos.*

Toda paralela a P es igual a su imagen por s (pero cada una de ellas contiene solo un punto fijo).

Se ve claramente que $s = s^{-1}$, lo que prueba que *s es una permutación en* Π.

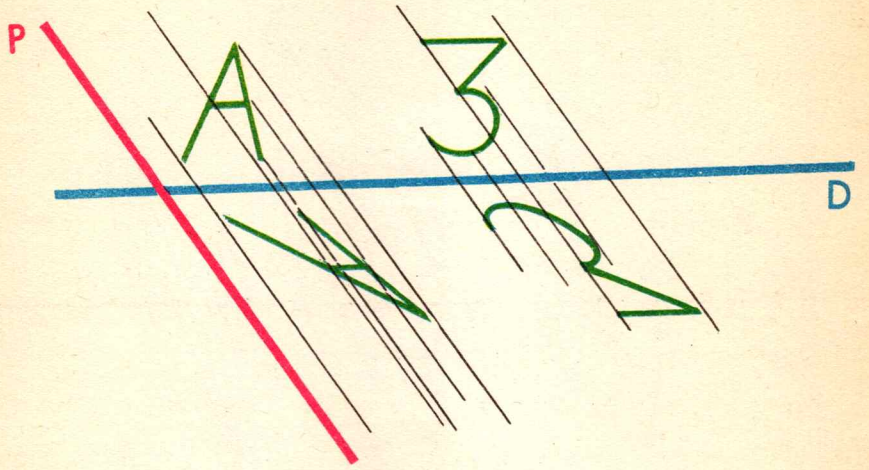
Además, si cada una de las letras x, y designa un punto de Π:

$$x = s(y) \iff y = s(x)$$

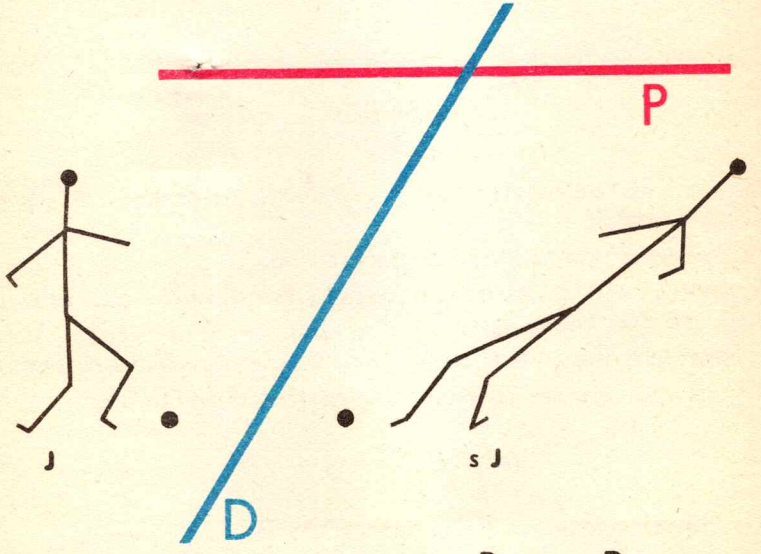
De esto resulta que para toda parte Q de Π,

$$x \in sQ \iff s(x) \in Q$$

2. Dibuja un gran 3 y rectas D y P no paralelas.
¿Quieres buscar la imagen de ese 3 por la simetría *s* paralela a P y de eje D?
¿La imagen de ese 3 es también un 3?
Procede del mismo modo con las letras del alfabeto.

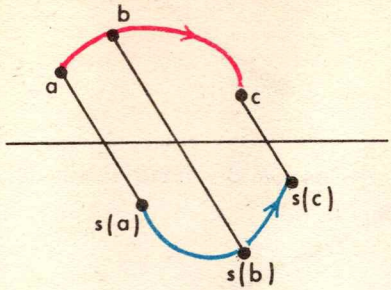


3. Traza rectas D y P no paralelas.
Elige a tu gusto diversas partes del plano Π.
Busca sus imágenes por la simetría de eje D paralela a P.

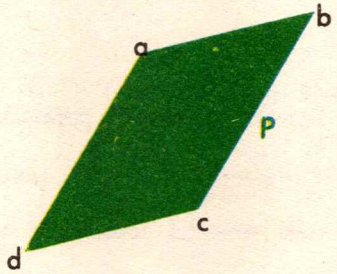


s : SIMETRÍA PARALELA a **P**, DE EJE **D**

4. He aquí 3 puntos no alineados a, b, c.
Observa el sentido de la terna ordenada (a, b, c).
Se tiene, además, una simetría paralela s.
¿Qué compruebas con respecto al sentido de $(s(a), s(b), s(c))$?



5. Designemos por a, b, c, d los vértices consecutivos del paralelogramo cerrado P.

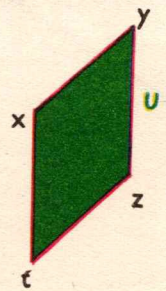


¿Cuál es la imagen de P por la simetría paralela a bd y de eje ac?
¿Cuál es la imagen de P por la simetría paralela a ac y de eje bd?

6. Sea s la simetría paralela a P y de eje D.
Sea E una parte de Π.
Si $E = sE$, se dice que D es un **eje de simetría afín** del conjunto E.

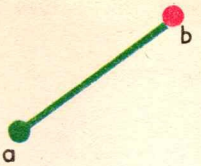
Así, las rectas ac y bd son ejes de simetría afín del paralelogramo P.

7. ¿Quieres hallar 4 ejes de simetría afín del paralelogramo U?

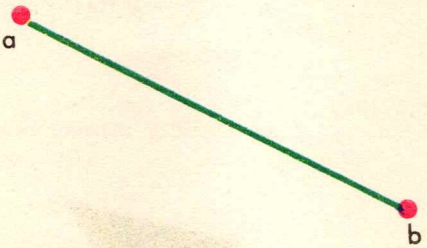


8. ¿Cuáles son los ejes de simetría afín de la recta D?

9. ¿Cuál es el conjunto de los ejes de simetría afín del segmento semiabierto $[ab[$?



10. ¿Cuál es el conjunto de los ejes de simetría afín del segmento abierto $]ab[$?

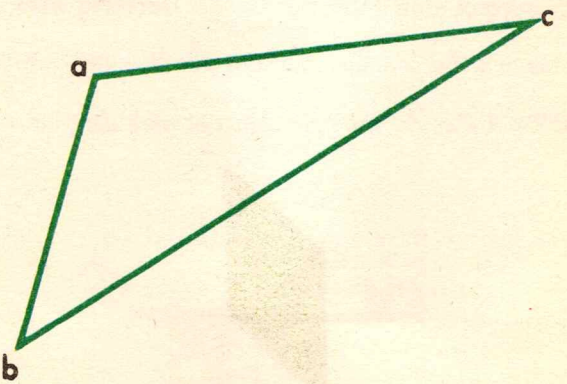


11. Sean A y B rectas tales que $\{o\} = A \cap B$.
Designemos por s la simetría de eje A, paralela a B, y por t la simetría de eje B, paralela a A.
¿Quieres mostrar que $s \circ t = t \circ s = s_o$? (simetría de centro o).

12. ¿Quieres probar que toda simetría central es la compuesta de dos simetrías paralelas?

13. Sean las rectas $A \parallel B \nparallel P$.
Si a designa la simetría de eje A, paralela a P, y b la simetría de eje B, paralela a P, ¿quieres probar que $b \circ a$ es una traslación paralela a P?

14. ¿Cuál es el conjunto de los ejes de simetría afín del triángulo abc?



24

Grupos

1 — DEFINICIÓN DE GRUPO

— ¿Quieres recordar los ejemplos de grupos que hemos encontrado antes?

$Z, +$
$\mathcal{C}, o$ $\quad V, +$ $\quad \Pi_o, +$
$\mathcal{E}, o$
$\mathcal{P}E, \Delta$

— ¿Qué puedes decir de los grupos $\mathcal{C}, o$; $V, +$ y $\Pi_o, +$?
— Que con notaciones diferentes representan el mismo grupo.
— ¿Quieres recordarnos la definición de grupo?

$G, *$ es un grupo

ssi

1. Para todo $x, y \in G$: $\quad x * y \in G$
2. Para todo $x, y, z \in G$: $\quad (x * y) * z = x * (y * z)$
3. Existe $v \in G$ tal que para todo $x \in G$: $\quad x * v = x = v * x$
4. Para todo $x \in G$, existe $\bar{x} \in G$ tal que: $\quad x * \bar{x} = v = \bar{x} * x$

— Dicho de otro modo, un grupo G, *
es un conjunto G dotado de una ley *
1, interna y definida en todo el conjunto;
2, asociativa;
3, que admite el neutro v;
4, y tal que todo elemento $x \in G$ posee un simétrico $\bar{x}$.

— ¿Cuál es el neutro en cada uno de los ejemplos que has dado?

— El neutro de Z, $+$ es el número 0.

El neutro de $\mathfrak{T}$, o es la transformación idéntica 1_Π.

El neutro de V, $+$ es el vector nulo $\vec{oo} = \vec{aa}$.

El neutro de Π_o, $+$ es el punto o.

El neutro de $\mathfrak{S}E$, o es la transformación idéntica 1_E.

El neutro de $\mathcal{P}E$, Δ es el conjunto vacío ϕ.

— ¿Quieres, en cada uno de estos ejemplos, describir el simétrico de un elemento cualquiera?

— En Z, $+$ el simétrico del entero racional a es el entero racional $-a$.

En $\mathfrak{T}$, o el simétrico de la traslación t es la traslación recíproca t^{-1}. (Se la obtiene dando vuelta todas las flechas de t.)

En V, $+$ el simétrico del vector $\vec{ab}$ es el vector $-\vec{ab} = \vec{ba}$.

En Π_o, $+$ el simétrico de un punto a es el simétrico de ese punto respecto de o. Se lo designa $-a$. (Podemos escribir $-a = s_o(a)$.)

En $\mathfrak{S}E$, o el simétrico de la permutación $f \in \mathfrak{S}E$ es la permutación recíproca f^{-1}. (Se obtiene dando vuelta todas las flechas de f).

En $\mathcal{P}E$, Δ toda parte A de E es su propia simétrica.

— ¿Quieres buscar en el libro los pasajes que justifican tus respuestas?

	grupo	ley	neutro	un elemento y su simétrico	
Un grupo en general	**G, ***	*****	**v**	**g**	**$\bar{g}$**
El grupo de los enteros racionales	Z, $+$	$+$	0	z	$-z$
El grupo de las traslaciones	$\mathfrak{T}$, o	o	1_Π	t	t^{-1}
El grupo de los vectores	V, $+$	$+$	$\vec{o}$	$\vec{v}$	$-\vec{v}$
El grupo del plano puntual	Π_o, $+$	$+$	o	a	$-a$
El grupo simétrico de E	$\mathfrak{S}E$, o	o	1_E	f	f^{-1}
El grupo $\mathcal{P}E$, Δ	$\mathcal{P}E$, Δ	Δ	ϕ	A	A

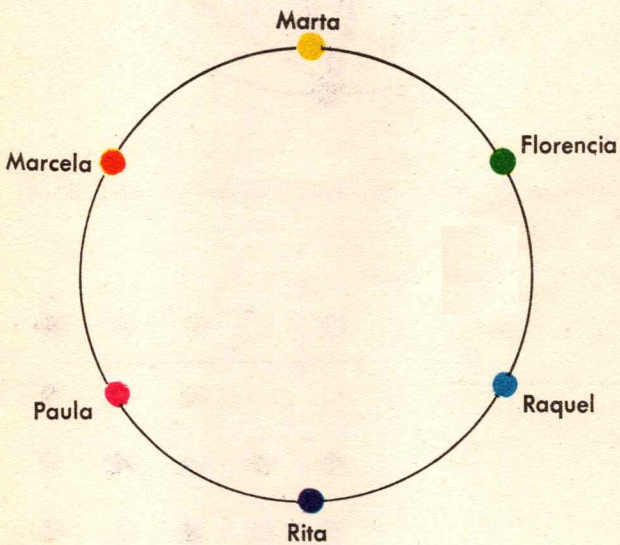
EJERCICIOS

1. Si E es un conjunto no vacío,
entonces $\mathcal{P}E, \cup$ y $\mathcal{P}E, \cap$ no son grupos.

2. $Z, -$ y $Z, .$ no son grupos.

2 — UN JUEGO

Seis compañeras, Marta, Florencia, Raquel, Rita, Paula, Marcela, se colocan alrededor de una mesa redonda.



Vamos a dar al conjunto G de las seis, una ley de grupo.
Una de ellas tendrá entonces que representar un papel especial.

— Será el de elemento neutro.

— Pongamos papelitos con los 6 nombres dentro de mi sombrero y saquemos uno . . . La suerte ha designado a Marta elemento neutro.

A continuación cada una de estas alumnas define una permutación en G.

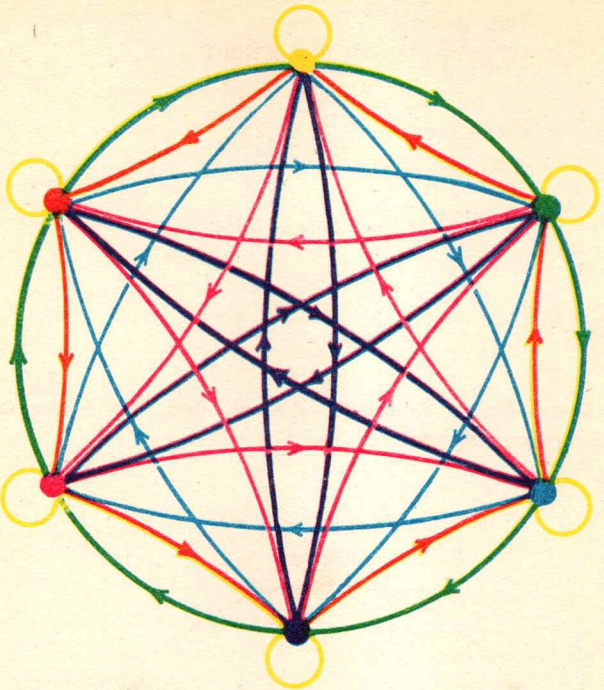
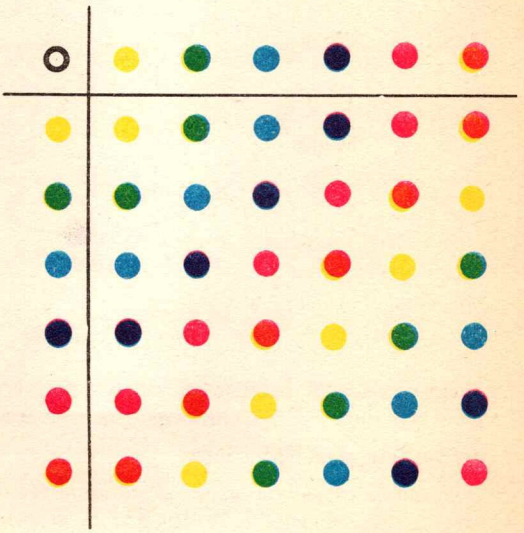


GRÁFICO 168

— ¿Quieres establecer la tabla de multiplicación (o composición) de estas permutaciones?
¡Atención con el orden de las permutaciones!

o		y
x		x o y



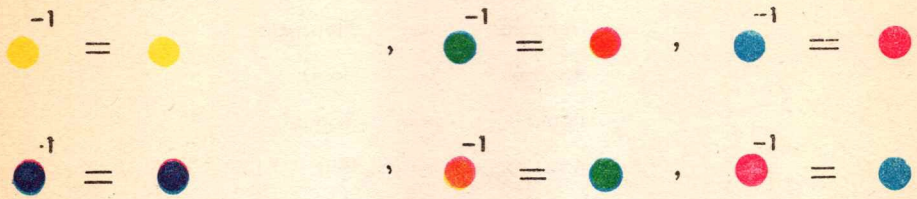
— ¿Quieres verificar si estamos en presencia de un grupo?

— 1. La tabla muestra que la compuesta de dos de estas permutaciones es también una de estas permutaciones.

2. La ley es asociativa, puesto que se trata de **composición de relaciones.**

3. La permutación amarilla (transformación idéntica) es elemento neutro.

4. La tabla muestra que cada una de estas permutaciones admite una simétrica que no es otra que su recíproca.



Se trata, entonces, de un grupo.

— Sabes que la ley o no es conmutativa en general.
¿Qué observas, no obstante, al examinar la tabla de multiplicación de nuestro grupo?

— La ley es conmutativa.

— Diremos que el **grupo es conmutativo.**

Reemplaza cada color por el nombre de la alumna correspondiente e indica la ley utilizando + en lugar de o.

— He aquí la tabla de adición de G, +

+	Marta	Florencia	Raquel	Rita	Paula	Marcela
Marta	Marta	Florencia	Raquel	Rita	Paula	Marcela
Florencia	Florencia	Raquel	Rita	Paula	Marcela	Marta
Raquel	Raquel	Rita	Paula	Marcela	Marta	Florencia
Rita	Rita	Paula	Marcela	Marta	Florencia	Raquel
Paula	Paula	Marcela	Marta	Florencia	Raquel	Rita
Marcela	Marcela	Marta	Florencia	Raquel	Rita	Paula

G, + es un grupo conmutativo.

— Como la ley de grupo ha sido indicada por $+$, resulta cómodo designar el elemento neutro por 0 y el simétrico del elemento a por $-a$.
¿Quieres detallar esta convención?

$$\begin{aligned} &\text{Marta} = 0 \\ -\,&\text{Marta} = \text{Marta} = 0 \\ -\,&\text{Florencia} = \text{Marcela} \\ -\,&\text{Marcela} = \text{Florencia} \\ -\,&\text{Raquel} = \text{Paula} \\ -\,&\text{Paula} = \text{Raquel} \\ -\,&\text{Rita} = \text{Rita} \end{aligned}$$

— Calcula:

Florencia $+$ Paula

Marcela $+$ Rita $+$ Raquel

Rita $+$ Florencia $+$ Paula

Marta $+$ Florencia $+$ Raquel $+$ Rita $+$ Paula $+$ Marcela

Marta $-$ Florencia $-$ Raquel $-$ Rita $+$ Paula $-$ Marcela

Marta $+$ Florencia $-$ Raquel $-$ Rita $+$ Paula $+$ Marcela

Marta $+$ Florencia $+$ Raquel $-$ Rita $-$ Paula $-$ Marcela

Problema: x es una de las integrantes del grupo.
No te digo quién es x.
Pero sí que

$$x + \text{Florencia} = \text{Marcela}.$$

¿Quieres decirme quién es x?

Solución: Sé que

$$\begin{aligned} &x + \text{Florencia} = \text{Marcela}; \\ \text{luego,}\quad &x + \text{Florencia} - \text{Florencia} = \text{Marcela} - \text{Florencia} \\ &x + 0 = \text{Marcela} + \text{Marcela} \\ &x = \text{Paula} \end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. ¿Quieres resolver estas ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{Rita} + x &= \text{Raquel} \\ \text{Marcela} + x + \text{Paula} &= \text{Florencia} \\ -\text{Rita} + x + \text{Marcela} &= \text{Marta} \\ \text{Raquel} - x - \text{Paula} &= -\text{Rita} \end{aligned}$$

2. ¿Cuál es el menor subgrupo G, + que contiene a Raquel?

3. ¿Cuál es el menor subgrupo de G, + que contiene a Paula y a Rita?

4. ¿Cuáles son todos los subgrupos de G, +?

5. Podemos perfectamente hacer estas convenciones:

$$\begin{aligned} 3\ \text{Marcela} &= \text{Marcela} + \text{Marcela} + \text{Marcela} \\ (-2)\ \text{Raquel} &= -(2\ \text{Raquel}) \end{aligned}$$

¿Quieres calcular:

Florencia + 2 Raquel + 3 Rita + 4 Paula + 5 Marcela + 6 Marta

217.389 Marta,
6 Florencia,
7 Florencia,
60 Florencia,
62 Florencia,
217.389 Florencia,

Florencia + 17 Raquel − 15 Rita + 6.666.666 Paula + 14 Marcela?

6. ¿Quieres recomenzar nuestro juego con toda la clase?
Si tu clase es muy numerosa va a resultar muy complicado dibujar las permutaciones y la tabla de adición será muy larga. Tendrás, pues, que prescindir eventualmente del gráfico y hasta de la tabla.
Coloca los alumnos en círculo y que la suerte designe el cero.
Inmediatamente tiene que ser posible definir la suma de todo par ordenado de condiscípulos.

7. Recomienza nuestro juego con 8, 7, 5, 4, 3, 2, 1 alumnos.
En cada uno de estos casos, ¿quieres determinar todos los subgrupos?

3 — GRUPOS CÍCLICOS

En el parágrafo precedente nos servimos de colores para designar los elementos de un grupo y después reemplazamos los colores por nombres.

Ahora vamos a reemplazar los nombres por números y conservaremos el signo $+$ para la adición.

Marta	Florencia	Raquel	Rita	Paula	Marcela
0	1	2	3	4	5

El grupo así definido se designará $Z_6, +$.
Construye la tabla de sumar en $Z_6, +$:

$+$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

TABLA DE ADICIÓN EN $Z_6, +$

Indica el simétrico de cada elemento de Z_6.

$$-0 = 0$$
$$-1 = 5$$
$$-2 = 4$$
$$-3 = 3$$
$$-4 = 2$$
$$-5 = 1$$

EJERCICIOS

1. Construye la tabla de adición en Z_8, Z_7, Z_5, Z_4, Z_3. Z_2, Z_1.

2. Resuelve estas ecuaciones:

En Z_5	$x + 4 = 2$
En Z_6	$x + 4 = 2$
En Z_7	$x + 4 = 2$
En Z_{50}	$x + 4 = 2$
En Z_5	$2 + x + 4 = 1$
En Z_{11}	$-3 + x + 7 = 2$
En Z	$3 + x - 87 = 5 - x + 87$.

3. ¿Quieres encontrar todos los subgrupos de Z_{42} y de Z_{43}?

4. ¿Cuál es el grupo aditivo definido naturalmente por los días de la semana si sabes que domingo = 0?
¿Quieres calcular miércoles + jueves,
y resolver la ecuación

$$-\text{ viernes} + x + \text{sábado} = \text{martes?}$$

5. En el capítulo 22, § 3, ejercicio 9, pág. 392, construimos la tabla de composición del grupo simétrico de un par.

El elemento neutro estaba representado por un punto amarillo y el otro elemento del grupo por un punto rojo. ¿Quieres construir la tabla del grupo cíclico Z_2, + representando de nuevo el elemento neutro por un punto amarillo y el otro elemento por un punto rojo? ¿Quieres proceder igualmente con el grupo P $\{x\}$, Δ?

El par de enteros racionales $\{1, -1\}$ es un grupo para la multiplicación. Construye su tabla representando a 1 por un punto amarillo y a -1 por un punto rojo.

Tienes un grupo cualquiera de dos elementos $\{v, g\}$, * . Sin que te diga nada más estás en condiciones de construir su tabla representando a v por un punto amarillo y a g por un punto rojo.

¿Qué conclusión sacas?

4 — CÁLCULO EN UN GRUPO CUALQUIERA

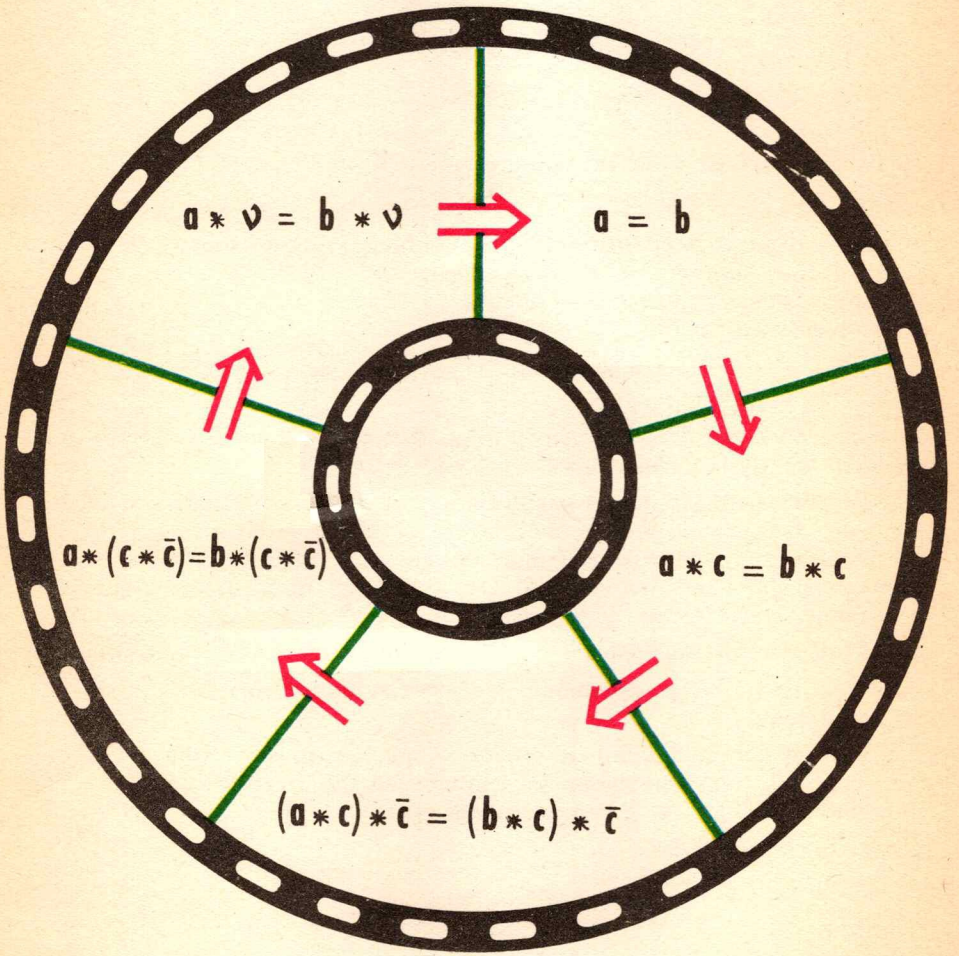
Hemos examinado muchos grupos muy diferentes y tú puedes encontrar muchos más.

Es, pues, importante y **económico** aprender a calcular, una vez por todas, en un grupo cualquiera.

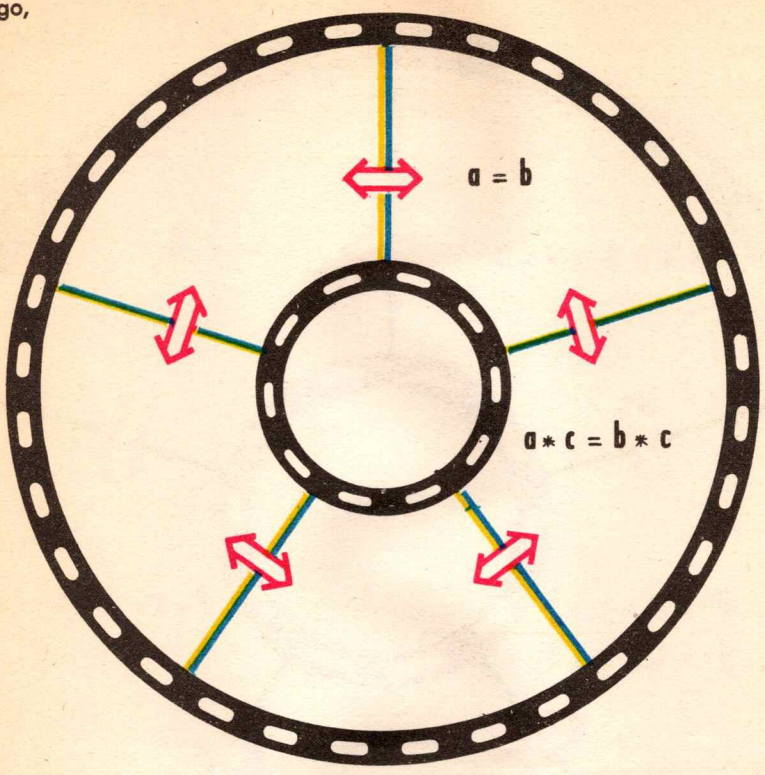
Las reglas así aprendidas serán válidas cada vez que tengas que ver con un grupo. Se tratará de ver con toda atención cuál es la ley del grupo, qué notación se da a la ley, cuál es el elemento neutro y cuál es la notación del simétrico de un elemento en ese grupo.

Consideremos, entonces, un grupo G, *.

Si cada una de las letras *a*, *b*, *c* designa un elemento de ese grupo, obtendrás inmediatamente la ronda de implicaciones que ves aquí.



Luego,



Así, las fórmulas $a = b$ y $a * c = b * c$ suministran exactamente la misma información.

*En un grupo G, *, si cada una de las letras* **a, b, c** *designa un elemento del grupo,*

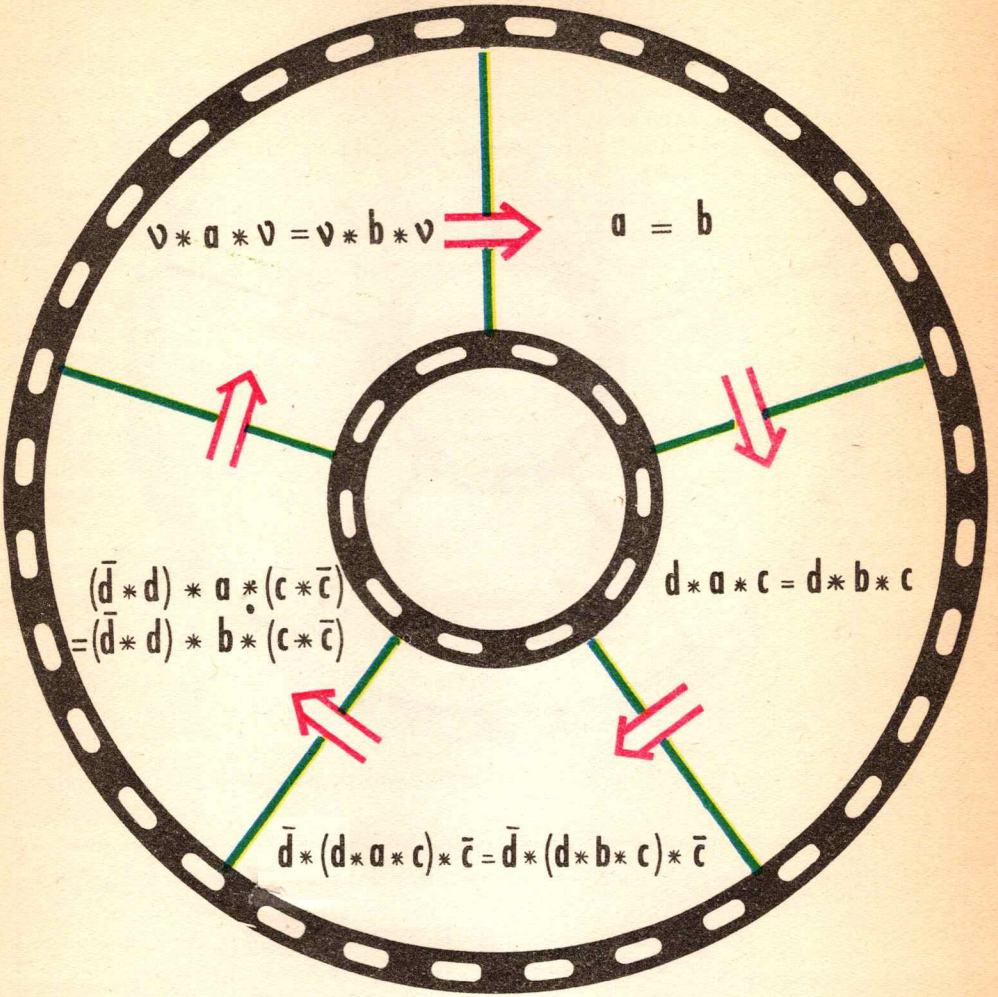
$$a = b \iff a * c = b * c$$

Para llegar a este resultado hemos multiplicado a la derecha por c y luego por $\bar{c}$. Haz lo mismo multiplicando a la izquierda.

Encontrarás

$$a = b \iff c * a = c * b$$

Habríamos podido también multiplicar simultáneamente a la izquierda por *d* y a la derecha por $c \in G$.



Aquí también podemos reemplazar cada ⇒ por ⇔

TEOREMA 1 — **En un grupo G,**
Si cada una de las letras *a, b, c, d* **designa un elemento del grupo,**

entonces $a = b$ ⇔ $d * a * c = d * b * c$

5 — UNICIDAD DEL NEUTRO Y DEL SIMÉTRICO DE TODO ELEMENTO

Hemos hablado muchas veces del neutro de un grupo. Es natural preguntarse si un grupo puede tener muchos neutros. Es verdad que en el caso de los grupos finitos que conocíamos, recordados aquí, el examen de la tabla de multiplicación revela que esos grupos tienen un solo neutro. También en los nuevos ejemplos de grupos que hemos examinado, resulta bastante fácil convencerse de que existe un solo neutro.

Por otra parte, este asunto es más sencillo de lo que, probablemente, te imaginas. Como verás, es muy fácil demostrar que un grupo no puede tener más de un elemento neutro.

Consideremos un grupo G, * y supongamos que cada una de las letras ν, ν' designa un neutro de G, *.

Calcula ahora el producto $\nu * \nu'$:

Como ν es neutro $\quad \nu * \nu' = \nu'$.

Como ν' es neutro, $\quad \nu * \nu' = \nu$.

Luego, $\quad \nu = \nu'$. l.q.q.d.

Sabemos ahora que el grupo G, * tiene un **único neutro** ν.

Como G, * es un grupo, todo $g \in G$ admite un simétrico, que hemos designado $\bar{g}$, que satisface la condición

$$g * \bar{g} = \nu = \bar{g} * g.$$

Es natural preguntarse si $\bar{g}$ es el único simétrico de g en G, *.

Supongamos entonces que tú hayas descubierto un simétrico de G y que lo hayamos llamado g'.

Como g' designa un simétrico de g tendremos de nuevo

$$g * g' = \nu = g' * g.$$

El cálculo que sigue prueba que $g' = g$.

ν es neutro	g'
g es simétrico de g	$= g' * \nu;$
asociatividad de *	$= g' * (g * g);$
g' es simétrico de g	$= (g' * g) * g;$
ν es neutro	$= \nu * g;$
	$= g.$

PROPOSICIÓN — Un grupo tiene un solo neutro y cada uno de sus elementos admite un único simétrico.

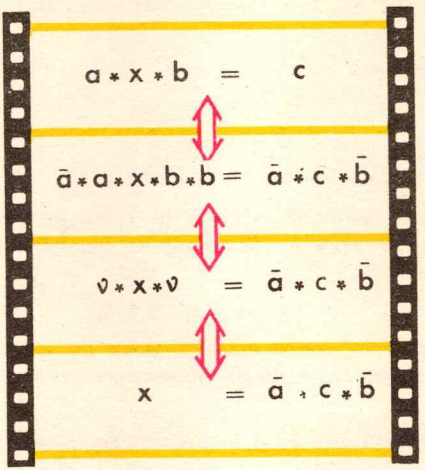
6 — ECUACIONES EN UN GRUPO

Consideremos un grupo G, *.

Si cada una de las letras *a*, *b*, *c* designa un elemento de G, vamos a mostrar que existe un elemento, y solo uno, $x \in G$ tal que

$$a * x * b = c$$

Veamos un filme de esta demostración:



TEOREMA 2 — **Si cada una de las letras *a*, *b*, *c* designa un elemento del grupo G, *, la ecuación**

$$a * x * b = c$$

admite en G, * la única solución:

$$x = \bar{a} * c * \bar{b}$$

Las fórmulas

$$a * x * b = c \qquad \text{y} \qquad x = \bar{a} * c * \bar{b}$$

son **equivalentes:** ellas proporcionan exactamente la misma información:

$$a * x * b = c \quad \Leftrightarrow \quad x = \bar{a} * c * \bar{b}$$

ECUACIÓN — SOLUCIÓN

EJERCICIOS

1. Si cada una de las letras a, b, c designa un entero racional, la ecuación

$$a + x + b = c$$

admite en Z la única solución:

$$x = -a + c - b.$$

2. La ecuación $2 + x - 87 = -68$ admite la única solución:

$$x = -2 - 68 + 87 = 17.$$

3. En Z, resuelve las ecuaciones

$$-53 + x + 19 = -177$$
$$17 - 81 + x - 48 = -103.$$

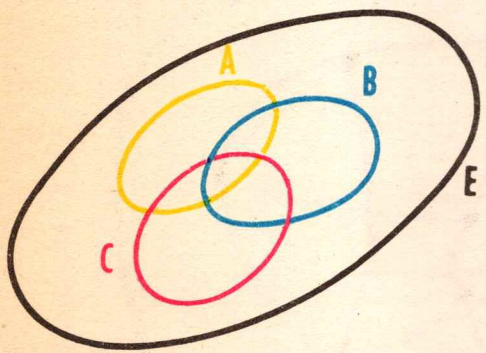
4. En $\mathcal{P}$E, Δ, la ecuación

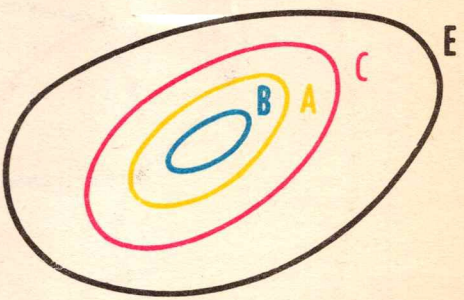
$$A \Delta X \Delta B = C$$

admite la única solución:

$$X = A \Delta C \Delta B$$

5. En $\mathcal{P}$E, Δ, ¿quieres dibujar la solución de la ecuación para cada una de las situaciones presentadas aquí?





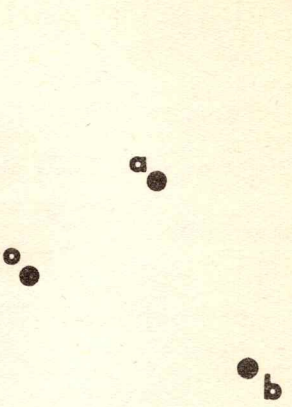
6. En Π_o, $+$, la ecuación

$$a + x + b = c$$

admite la única solución:

$$x = -a + c - b.$$

7. En Π_o, $+$, ¿quieres construir la solución de la ecuación $a + x + b = c$ para la situación siguiente?



8. En $\mathfrak{E}$, o, la ecuación

$$f \circ x \circ g = h$$

admite la única solución:

$$x = f^{-1} \circ h \circ g^{-1}.$$

9. En $\mathfrak{E}$, o, resuelve la ecuación $f \circ x \circ g = h$ para la situación que aquí mostramos.

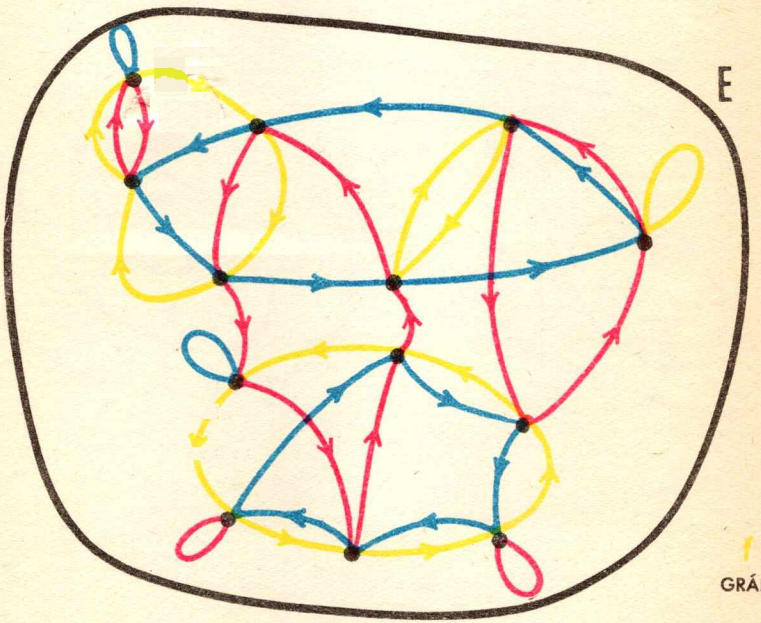


GRÁFICO 169

10. En $\mathcal{F}E, \Delta$ las seis ecuaciones siguientes admiten la misma solución:

$$A \Delta X \Delta B = C$$
$$A \Delta X \Delta C = B$$
$$B \Delta X \Delta A = C$$
$$B \Delta X \Delta C = A$$
$$C \Delta X \Delta A = B$$
$$C \Delta X \Delta B = A$$

11. ¿Quieres resolver estas ecuaciones?

En $Z_5, +$: $-2 + x + 4 = 1$

En $\mathfrak{S}E, o$: $g \circ x = 1_E$

En $\mathcal{F}E, \Delta$: $A \Delta X \Delta A = B$

En $G, *$: $a * b * x * c * d = v$

12. Si cada una de las letras a, b, c, d designa un punto de Π, ¿cuál es el punto x tal que $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bx} + \overrightarrow{ca} = \overrightarrow{cd}$

13. Te informan que en el grupo G, $*$

$$g * h = h.$$

¿Qué conclusión sacas respecto de g?

14. Te dicen que en el grupo $\mathfrak{S}E, o$

$$f \circ g = f.$$

¿Cuál es la permutación g?

15. Te dicen que en el grupo G, $*$

$$a * b = v.$$

Se puede, entonces, concluir que $a = b$ y $b = a$.
¿Por qué?

16. En el grupo $\mathfrak{S}E, o$

$$f \circ g = 1_E.$$

Puedes, entonces, deducir que $f \circ g = g \circ f$.
¿Qué sabes respecto de las permutaciones f y g?

17. En el grupo G, $*$

$$g * g = g \qquad g = v.$$

18. Te dicen que en Π_o, $+ 2a = a$.
Puedes sacar la conclusión de que $a = o$. ¿Por qué?

19. He aquí tres permutaciones f, g h del conjunto E.

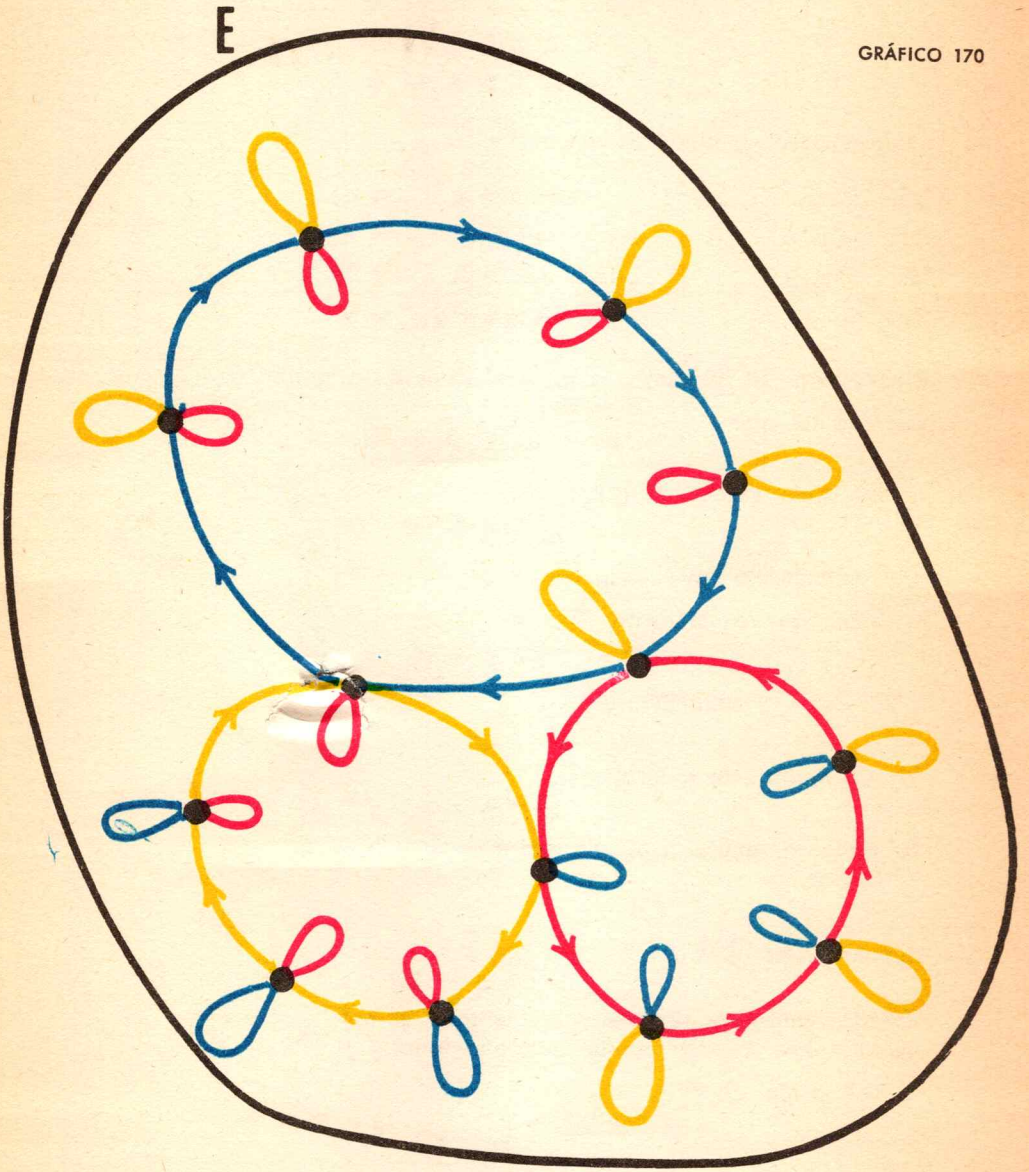
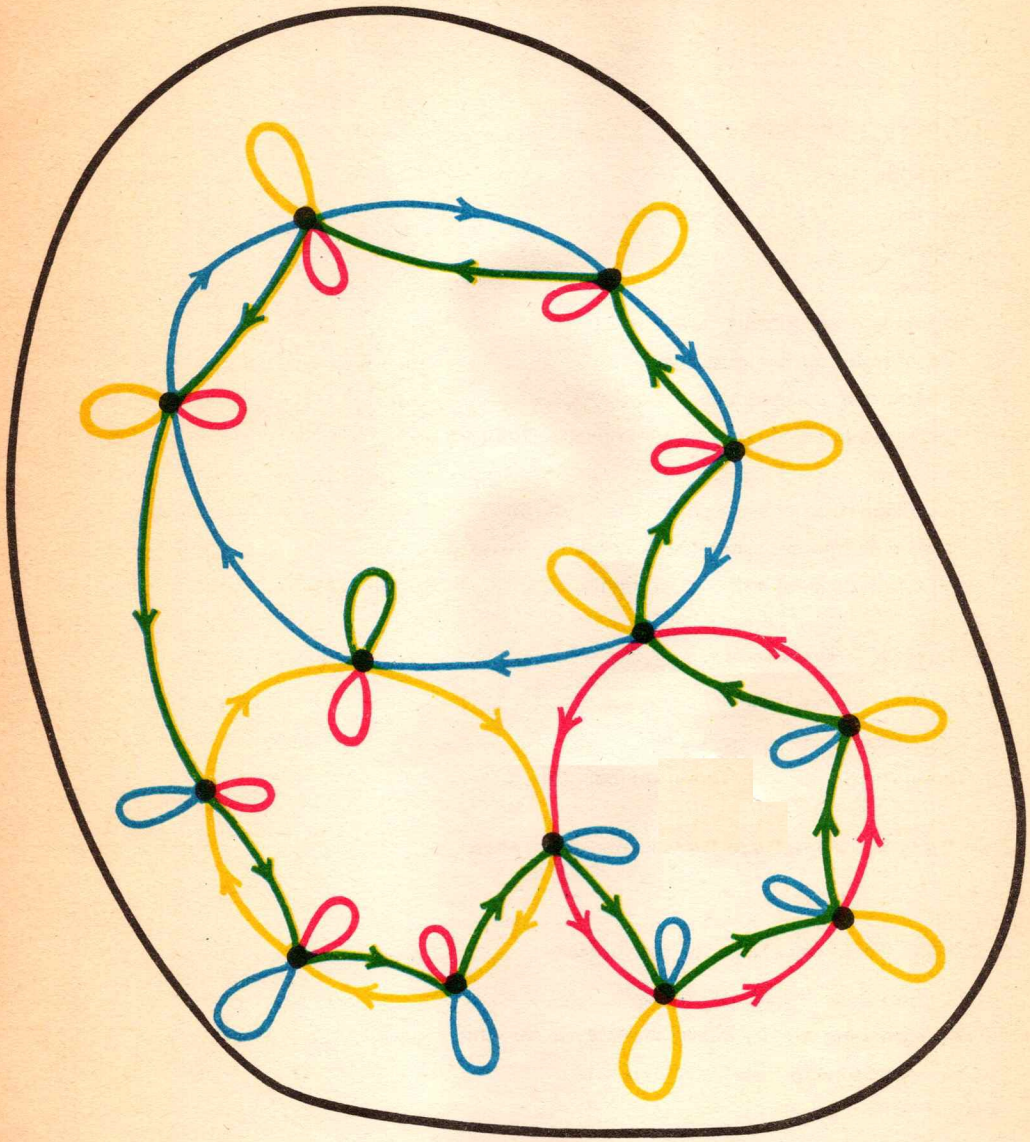


GRÁFICO 170

¿Quieres dibujar la permutación x en E tal que $f \circ x \circ g = h$

Solución:



$$f \circ x \circ g = h \iff x = f^{-1} \circ h \circ g^{-1}$$

GRÁFICO 171

TABLA DE MATERIAS

Pág.

CAPÍTULO I - **Conjuntos** 1

1. Conjunto 1
2. Ejemplos 1
3. Objeto 2
4. Elementos 2
5. Términos - Igualdades 3
6. Propiedades de la igualdad 4
7. El signo de pertenencia 4
8. Fabriquemos conjuntos según nuestra fantasía 4
9. Esquemas 5
10. Definición por comprensión 7
11. Pares - Conjuntos unitarios - conjunto vacío 8
12. Igualdad de conjunto - el conjunto $\varnothing$ 10

CAPÍTULO II - ***Partes*** 18

1. Parte de un conjunto 18
2. Propiedades de la inclusión 21
3. Conjunto de las partes de un conjunto 22

CAPÍTULO III - ***Intersección, unión, diferencia*** 26
$\cap$ $\cup$ $\setminus$

CAPÍTULO IV - ***Álgebra de conjuntos*** 33

1. El diagrama "hoja de trébol" 33
2. Asociatividad de la intersección y de la unión 34
3. No asociatividad de la diferencia 35
4. Distributividad 36
5. Antidistributividad 37

GEORG CANTOR 45

CAPÍTULO V - ***Particiones*** 46

CAPÍTULO VI - *Primeros elementos de geometría* 53

1. Conjuntos de puntos 53
2. Plano y axiomas 62
3. Rectas 66
4. Paralelismo 72
5. Direcciones 73
6. Perpendicularidad 78

EUCLIDES 87

CAPÍTULO VII - *Relaciones* 88

1. El juego "Nombre/Apellido" 88
2. El juego "Nombre/Nombre" 92
3. La relación ... tiene por hermana a ... en un conjunto de mujeres y varones 95
4. La relación ... tiene por hermana a ... en un conjunto de mujeres 96
5. La relación ... tiene por hermano o hermana 97
6. La relación ... divide a ... en un conjunto de enteros naturales 98
7. La relación ... tiene por padre a... 101
8. Una relación en el conjunto Z de los enteros racionales 102
9. Una permutación en un conjunto de alumnas 104
10. Relación de A a B — Producto $A \times B$ 106
11. Distributividad de $\times$ respecto de $\cup$ 111
12. Recíproca de una relación 112
13. Relaciones $\leqslant$, $<$, $\geqslant$, $>$ 114
14. Relaciones en un conjunto de conjuntos 117
15. Imagen de un conjunto por una relación 119
16. Ejercicios de recapitulación 121

ARTHUR CAYLEY 125

CAPITULO VIII - *Propiedades importantes de ciertas relaciones* 126

1. Introducción 126
2. Reflexividad 126
3. Antirreflexividad 128
4. Simetría 129
5. Antisimetría 131
6. Transitividad 133

CAPÍTULO IX - *Composición de relaciones* 139

1. Los abuelos 139
2. Niños y padres 142
3. La tabla de composición 144
4. Composición de relaciones cualesquiera 145
5. Si A y B son relaciones se tiene la fórmula $(B \circ A)^{-1} = A^{-1} \circ B^{-1}$ 146
6. La composición de relaciones es asociativa 147

CAPÍTULO X - *Equivalencias* 154
1. Clasificar para conocer, entender, retener 154
2. Partición definida por una relación 157

CAPÍTULO XI - *Órdenes* 161
1. Jerarquías y órdenes 161
2. Dos propiedades de las órdenes 164
3. La recta orientada 167
4. Semirrectas 170
5. Intervalos o segmentos 172
6. Orientación del plano 173
7. Convexidad 176

CAPÍTULO XII - *Funciones* 181
1. Definición de función 181
2. Valor de una función en un punto 182
3. Composición de funciones 184
4. Aplicaciones 188
5. Biyecciones 192
6. Inyecciones y suryecciones 195
7. Composición de inyecciones y suryecciones 202

CAPÍTULO XIII - *Permutaciones* 205
1. Permutaciones 205
2. Grupo de las permutaciones de un conjunto 206

EVARISTE GALOIS 215

CAPÍTULO XIV - *Transformaciones en el plano* 216
1. Definición 216
2. Las transformaciones constantes 217
3. La transformación idéntica 219
4. Una transformación más en π 220
5. Proyección paralela 221
6. Proyecciones coordenadas 224
7. Proyección paralela de una recta sobre una recta 225

CAPÍTULO XV - *Proyecciones paralelas y orden* 226
1. Proyección paralela de una recta orientada sobre una recta orientada 226
2. Pares ordenados paralelos 228
3. Semiplanos 229
4. Semiplanos definidos por una recta 232
5. Las diagonales de un paralelogramo 233
6. Teorema de Pasch 234

CAPÍTULO XVI - *Cardinales* 236

1. Equipotencia 236
2. Los números naturales 240
3. Conjuntos infinitos 241
4. El número δ 241
5. Teorema de Dekekind 243
6. Sandwiches 247
7. Orden de los cardinales 248

CAPÍTULO XVII - *Adición* 254

1. Definición de adición 254
2. Conmutatividad de la adición 261
3. Asociatividad de la adición 262
4. Elemento neutro 262
5. Adición y orden 266
6. Simplificabilidad de la adición de naturales 269

CAPÍTULO XVIII - *Multiplicación* 271

1. Definición de multiplicación 271
2. Papel de 0 y 1 en de la multiplicación 276
3. Conmutatividad de la multiplicación 277
4. Asociatividad de la multiplicación 278
5. La multiplicación distribuye la adición 280
6. La multiplicación y el orden 281
7. Divisibilidad 283

CAPÍTULO XIX - *El sistema de numeración binario* 296

1. Sistemas de numeración 296
2. El sistema binario 296
3. Adición en el binario 307
4. Comparación de números escritos en sistema binario 310
5. Multiplicación de los enteros naturales en el sistema binario 313

LEIBNIZ 315

CAPÍTULO XX - *Los enteros racionales* 316

1. Una batalla a muerte o los números negativos 316
2. Cambio de signo 320
3. Propiedades de Z 323
4. Ecuaciones en Z, $+$ 326
5. Resta 331
6. Definición de multiplicación de enteros racionales 333
7. El anillo Z, $+$, ... 337

CAPÍTULO **XXI** - ***Equipolencia*** 342

1. Pares ordenados equipolentes 342
2. Propiedades de la equipolencia 345
3. Construcción de pares ordenados equipolentes 349
4. Centro — punto medio 353
5. Proyecciones paralelas de pares ordenados equipolentes 357
6. Aplicaciones 365
7. Cruzamiento de equipolencias 368
8. Construcciones 374

CAPÍTULO **XXII** - ***Traslaciones*** 377

1. Traslaciones 377
2. El grupo de las traslaciones 386
3. Conmutatividad del grupo de las traslaciones 389
4. Vectores, adición de vectores 394
5. El grupo $\pi^{\bullet}$, $+$ 399
6. Multiplicación de vectores por enteros racionales 404
7. Propiedades de la multiplicación de un vector por un entero racional 407
8. Aplicaciones del cálculo vectorial 408
9. Subgrupos 412
10. Adición de partes de Π_0, $+$ 415
11. Proyección de vectores 418

CAPÍTULO **XXIII** - ***Simetrías centrales*** 422

1. Simetrías centrales 422
2. Imagen de una recta por una simetría central 424
3. Simetrías centrales y traslaciones 430
4. Grupo de las simetrías centrales y las traslaciones 435
5. Ejercicios y complementos 437

CAPÍTULO **XXIV** - ***Grupos*** 441

1. Definición de grupo 441
2. Un juego 443
3. Grupos cíclicos 448
4. Cálculo en un grupo cualquiera 450
5. Unicidad del neutro y del simétrico de todo elemento 453
6. Ecuaciones en un grupo 454

ÍNDICE ALFABÉTICO 462

ÍNDICE

	Pág.
absorbente (elemento)	276
anillo	338
antirreflexibidad	128
antisimetría	131
aplicación	188
asociatividad	34
axioma	63
binario	296
biyección	192
cardinal	236
centro de un conjunto de puntos	427
de un par	356
de una simetría	422
composición	139
conjunto	1
finito	241
infinito	243
unitario	11
vacío	11
conmutatividad	43
convexo	177
cruzamiento de equipolencias	368
diferencia	27
simétrica	43
dirección	74
disjuntos (conjuntos)	27
distributividad	36
divisibilidad	283
elemento	2
enteros naturales	240
racionales	319
equipolencia	342
equipotencia	236
equivalencia	156
función	181
gráfico	89
grupo	391
igualdad	3
imagen	119
inclusión	19
intersección	27
inyección	195
letanía	243
neutro	207
orden	161
en una recta	169
total	162
orientación de una recta	168
del plano	174
par	11
paralelismo	72
pares equipolentes	344
idénticos	90
ordenados	90
paralelos	228
parte	18
partición	47
permutación	103
perpendicularidad	79
pertenencia	2
producto de conjunto	107
proyección	215
punto medio	356
recíproca	113
reflexividad	126
relación	90
segmento (abierto-cerrado)	172
semiplano	230
semirrecta	170
simetría central	422
de una relación	129
paralela	437
simplificabilidad	269
subgrupo	412
suryección	195
término	3
transformación	213
transitividad	133
traslación	378
unión	27
valor absoluto	334
de una función en un punto	182
vector	394

Se terminó de imprimir
en Abril de 1968
en PABLO PAOPI E HIJOS,
Santo Domingo 2265 - Buenos Aires

rie de interesantes ejercicios programados.

Si bien los temas expuestos en esta obra son de gran trascendencia en la matemática moderna, su mérito fundamental consiste en el uso de recursos pedagógicos novedosos que hacen más accesible la materia. Los esquemás multicolores, los ejemplos inspirados en la vida cotidiana, las demostraciones mediante films, la simplicidad que domina toda la obra, son medios didácticos de gran valor, compatibles con el más severo rigor matemático.

Georges Papy se doctoró en matemática en la Universidad de Bruselas y pronto enseñó allí y en otras universidades extranjeras. Consagrado a la reforma de la enseñanza de la matemática en la escuela secundaria, desde 1961 dirige el Centro Belga de Pedagogía de la Matemática.

ALGUNOS TÍTULOS DE EUDEBA

La enseñanza de la matemática moderna en el primer curso - C. A. Trejo y J. G. Bosch

Ciclo medio de matemática moderna - C A. Trejo y J. G. Bosch

Álgebra para escuelas secundarias - O. Varsavsky

Introducción al álgebra, nociones de álgebra lineal - M. Cotlar y C. Ratto de Sadosky

Introducción a la teoría de conjuntos - L. Oubiña

EDITORIAL UNIVERSITARIA DE BUENOS AIRES